Mathem.
Statie. p. 482. R

Lehrbuch
der
Mechanik,
vorzüglich der Statik fester Körper;

besonders
für
den öffentlichen mathematischen Unterricht
auf
Gelehrten- und Bürgerschulen;

dann aber auch
zum Privatgebrauch überhaupt
eingerichtet
von

Johann Gottlieb Schmidt,
der W. Mag. und Mathematikus an der Königl. Sächs. Landschule zu Pforta.

Mit neun Kupfern.

Leipzig, 1807.
bey Johann Conrad Hinrichs.

20

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

Der Gegenstände, mit deren Betrachtung sich zu unsern Zeiten die Mechanik überhaupt beschäftigen soll, sind so viele, daß es nöthig war, diese Wissenschaft in verschiedne Abtheilungen zu zerlegen, deren jede, wegen ihres weiten Umfangs, selbst wieder eine besondere Wissenschaft genennt zu werden verdient. Eine von diesen, und zwar die erste, auf welche sich die übrigen gründen, führt den Namen der Statik fester Körper. Denn eben von ihnen wird in ihr das Gleichgewicht betrachtet, in welches sie, vermittelst sehr einfacher Werkzeuge, dergleichen der Hebel, das Rad, die schiefe Fläche und noch einige andre sind, höchst vortheilhaft versetzt werden können. Die Anfangsgründe der Statik nun genau und deutlich aus einander zu setzen, ist die Hauptabsicht des gegenwärtigen dritten Bandes vom mathematischen Lehrbuche. Weil doch aber hier zugleich, obwohl weniger umständlich, auch manches von der

Bewe-

Bewegung fester Körper vorgetragen werden soll, welches auf die Erlernung aller mechanischen Wissenschaften vorbereiten kann; so wird das Ganze nicht unschicklich für eine Anleitung zur Mechanik überhaupt, obwohl besonders zu der Statik, als ihrem wichtigsten Theile, angesehen werden können.

Dieser Band des Lehrbuchs wird von der Verlagshandlung auch einzeln, unter einem besondern Titel, ausgegeben. Denn obwohl in ihm auf die Sätze der Arithmetik und Geometrie, die der erste Band enthält, oft zurückgewiesen wird; so kann diesen doch derjenige entbehren, der jene zwey Wissenschaften schon anders woher erlernet hat.

Uebersicht

Uebersicht
des Inhalts
der mechanischen Anfangsgründe;
welche besonders die Statik betreffen.

Nach den Paragraphen.

A.

Vom Orte; von der Ruhe und Bewegung; von der letztern Richtung und Geschwindigkeit; von den Kräften, besonders von der Schwerkraft; vom Gleichgewicht fester Körper; vom Mittelpunct der Schwere und der Größe. (§. 1—78.)

B.

Vom Gleichgewicht und Bewegung fester Körper, durch Vermittelung der einfachen Werkzeuge, oder Maschinen. (§. 79—469.)

Und zwar insonderheit:

I. Vom Gleichgewicht und Bewegung der Kräfte am mathematischen und physischen Hebel.

Vom Hebel der ersten und zweyten Art; vom geradlinigen und krummlinigen Hebel; vom Winkelhebel; vom einarmigen Hebel; vom Hebel mit verschobenen Armen; vom einfachen und zusammengesetzten Hebel.

Von Werkzeugen, in denen der Hebel zum Grunde liegt; besonders von einigen Gattungen der Wage.

Von Friction der Flächen an physischen Körpern und der Störrigkeit der Seile. (§. 79—91, und §. 96—229.)

II. Vom Gleichgewicht und Bewegung der Kräfte an mathematischen und physischen Rollen.

Von der Rolle der ersten und zweyten Art, ingleichen vom Flaschenzuge. (§. 92—95, und §. 230—280.)

III. Vom

III. Vom Gleichgewichte und Bewegung der Kräfte bey dem mathematischen und physischen Rade an der Welle.

Vom einfachen Rade sowohl, als auch vom Räderwerke; von gezahnten sowohl, als von Seilrädern; von verschiedenen Gattungen der gezahnten.

Von mehrern Maschinen, wo das Rad an der Welle zum Grunde liegt. (§. 281 — 356.)

IV. Vom Gleichgewicht und Bewegung der Kräfte bey mathematischen schiefen Linien u. Flächen an physischen Körpern.

Von der mathematischen schiefen Linie, wie auch Fläche, der ersten und zweyten Art; von der unbeweglichen und beweglichen der zweyten Art. Anwendung auf schiefe Flächen an physischen Körpern. (§. 357 — 408.)

V. Vom Gleichgewicht und Bewegung der Kräfte am mathematischen und physischen Keile.

Vom einfachen, zweyfachen, vielfachen und runden Keile; ingleichen vom regulären und irregulären. (§. 409 — 426.

VI. Vom Gleichgewicht und Bewegung der Kräfte an der mathematischen Schraubenlinie und der physischen, körperlichen Schraube.

Vom mathematischen Schraubengange, dem unbeweglichen sowohl als dem beweglichen, bloß als Linie betrachtet. Vom einfach beweglichen Schraubengange und vom zweyfach beweglichen. Von der Schraube, der cylindrischen und conischen. In Rücksicht der angegebenen Verschiedenheiten, von der physischen Schraube. Von der Schraubenmutter; von der Schraube, die ohne Mutter wirkt, und von derjenigen, die einer Mutter bedarf; von der Schraube, die sich selbst mit einer Mutter versieht, und derjenigen, welche dieselbe schon zubereitet finden muß. Von der Verstärkung der Schraube. Von der Schraube ohne Ende. (§ 427 — 467.)

VII. Uebersicht der bisher genannten einfachen Maschinen. (§. 468. 469.)

Anfangs-

Anfangsgründe
der
Mechanik;
insbesondre
der Statik fester Körper.

Erklärung.

§. 1. Wo im allgemeinen Raume ein jedes der von Gott geschaffnen Dinge sich befindet; daselbst ist sein Ort. Dieser Ort heißt sein absoluter Ort, wenn man ihn mit keinem Orte eines andern Dinges in Vergleichung bringt; ein relativer Ort aber heißt er, wenn man ihn, mit wenig oder viel Oertern andrer Dinge, oder auch nur mit einem einzigen, in Vergleichung gestellt, betrachtet.

Anmerkung.

§. 2. Denkt man z. E. den Mond in dem Theile des Weltraums, den er wirklich einnimmt, ohne um ihn her auf Oerter andrer Körper zu achten; so denkt man ihn an seinem absoluten Orte. Vergleicht man aber seinen Ort, etwa zur Zeit einer Sonnenfinsterniß, mit den Oertern der Sonne und der Erde, und bemerkt, daß zwischen den letz-

tern beyden jener mitten inne liegt, doch der Erde weit näher als der Sonne; so betrachtet man einen relativen Ort des Mondes.

Erklärung.

§. 3. So lange ein Ding im Ganzen den absoluten Ort behält, und auch alle Theile des Dinges, wenn es dergleichen hat, ihre absoluten Oerter behalten; so lange befindet es sich in absoluter Ruh. Verändert es aber seinen absoluten Ort im Ganzen, oder thun dieses wenigstens Theile von ihm, wenn auch das Ganze an seinem absoluten Orte bleibt; so eignet man dem Dinge absolute Bewegung zu.

Anmerkung.

§. 4. Wenn eine Kugel überhaupt an ihrem absoluten Orte blieb, sich aber um ihre Achse wendete; so wär sie gleichwohl in absoluter Bewegung. Denn ihre Theile veränderten die absoluten Oerter.

Zusatz.

§. 5. Ob irgend ein erschaffnes Ding sich in absoluter Ruh, sowohl überhaupt als in Rücksicht seiner Theile, befindet; können wir nicht wissen. Auf der Erde wenigstens kann derjenige, welcher die tägliche Wendung um ihre Achse und ihre jährliche Schwingung um die Sonne annimmt, nichts in absoluter Ruh denken; sondern alles in und auf ihr, auch der Mensch, dem Körper und dem Geiste nach, befindet sich anhaltend in absoluter Bewegung.

Wer aber den Stillestand der Erde annähm, indem er den Wechsel der Tages- und Jahreszeiten von der Bewegung der Sonne ableitete, der könnte eine, auf dem Boden des festen Landes unsrer Erde, irgendwo liegende Kugel in absoluter Ruh denken; und erst, wenn sie fortgerollt würde, käm sie in absolute Bewegung.

Erklä-

Erklärung.

§. 6. Relative Ruh wird einem Dinge beygelegt, wenn es seinen relativen Ort (§. 1.) behält; relative Bewegung aber, wenn es ihn verändert.

Zusatz.

§. 7. Es kommt also jedes Mahl bey relativer Ruh und Bewegung eines Dinges darauf an; auf welche Oerter anderer Dinge man seinen relativen Ort hat beziehen wollen. So lange es diesen nur in Absicht jener Oerter behält; so lange ist es in relativer Ruh: in relativer Bewegung ist es aber; wenn es ihn in Absicht jener ändert.

Anmerkung.

§. 8. Wenn z. E. in dem Gemache eines segelnden Schiffs ein Tisch steht, und man hat bey seinem relativen Orte nur auf die Theile des Bodens, der Decke und der Wände im Gemach Rücksicht genommen; so wird er in relativer Ruh bleiben, so lange er nur seine Entfernungen von den gedachten Theilen des Gemachs behält. Daß er seinen relativen Ort jeden Augenblick in Rücksicht der Bäume und Gebäude eines nahen Ufers ändert, kommt hier nicht in Betrachtung; denn auf sie hätte man den relativen Ort nicht bezogen. Wenn aber der Tisch auf den Dielen des Gemachs fortgerückt und von einer Wand an die andre versetzt würde; so käm er allerdings in relative Bewegung, weil er nun seinen Ort in Rücksicht der Oerter solcher Gegenstände änderte, auf welche jener Bezug haben sollte.

Erklärung.

§. 9. Die relative Bewegung eines Dinges hangt entweder von dem Dinge selbst ab, dessen relativen Ort man bestimmt hat, oder von den Dingen, auf deren Ort bey jener Bestimmung der Bezug genommen worden ist. Im ersten Falle ist es eine wahre relative Bewegung, im an-

dern eine scheinbar relative. Bey einem Dinge kann entweder eine von beyden allein, oder es können auch beyde zugleich bey ihm Statt finden.

Anmerkung.

§. 10. Es stehn z E. auf einem Tische ein Conus und ein Cylinder; der relative Ort eines jeden dieser Körper werde nur auf den Ort des andern bezogen. Beyde sind gegen einander in relativer Ruh, so lange sie die relativen Oerter behalten. Man verschiebe nun aber den Conus nach dem Cylinder hin; so verändern beyde ihren relativen Ort gegen einander und kommen also beyde in relative Bewegung. Diese ist aber bey dem wirklich verrückten Conus eine wahre relative Bewegung, bey dem eigentlich unverrückten Cylinder hingegen, eine bloß scheinbar relative. Verschöb man beyde Körper auf ein Mahl gegen einander; so wär bey beyden die relative Bewegung theils wahr, theils scheinbar.

Zusatz.

§. 11. Wer in der Astronomie die Bewegung der Erde annimmt, und also nach (§. 5.) alles auf ihr in steter absoluter Bewegung zu denken genöthigt ist, kann gleichwohl jeden irdischen Gegenstand entweder in relativer Ruh oder in relativer Bewegung denken; wenn er nur den Bezug jedes Mahl auf andre irdische Gegenstände nehmen will: denn, auf himmlische Gestirne bezogen, würde freylich auch jedes Ding auf der Erde nie in relativer Ruh, sondern stets in relativer Bewegung zu denken seyn.

§. 12. In diesen Anfangsgründen der Mechanik und Statik wird jederzeit, wenn von Ruhe und Bewegung eines Körpers gesprochen wird, seine relative Ruh und seine wahre relative Bewegung (§. 6. 9.) verstanden. Der Bezug dabey geschieht bloß auf die nächsten Gegenstände der Erde selbst. Wenn z. E. gesagt werden wird, daß eine Kugel stille hange oder sich bewege; so zeigt der erste

Aus-

Ausdruck ihre relative Ruh, der zweyte ihre wahre relative Bewegung an, beydes in Bezug auf die nächsten Gegenstände, etwa auf die Wände des Zimmers, in welchem die Kugel sich befindet.

Erklärungen.

§. 13. Die gerade Linie, nach welcher eine Bewegung geschieht, wird ihre Richtung genennt. Die Richtung heißt unabänderlich, wenn die Bewegung in einer und derselbigen geraden Linie bleibt; abänderlich aber, wenn sie aus einer geraden Linie in eine andre dergleichen übergeht, die mit der ersten einen Winkel macht. In beyden Fällen ist die Bewegung geradlinig. Krummlinig hingegen heißt sie, wenn sie in einer krummen Linie geschieht, wo die Richtung sich stets ändert.

§. 14. Wenn man bey einem bewegten Körper auf die Länge der Linie, welche er durchgeht, und zugleich auf die Länge der Zeit, in welcher er jene durchgeht, Acht hat: so beurtheilt man aus Vergleichung beyder mit einander die Geschwindigkeit seiner Bewegung. Aus der Größe der Linie allein, durch welche die Bewegung gegangen ist, oder aus der Zeit allein, durch welche sie gedauert hat, kann die Geschwindigkeit unmöglich beurtheilet werden.

§. 15. Wenn die Bewegung eines Körpers in jedem der kleinsten, unter sich gleichen, Zeittheile, durch eine gleichgroße Linie geschieht; so heißt sie gleichförmig: geschieht sie aber in jedem solcher Zeittheile nicht immer durch eine gleichgroße Linie; so heißt sie ungleichförmig.

Grundsatz.

§. 16. Wenn zwey Körper, jeder mit gleichförmiger Bewegung, sich in gleicher Zeit durch gleichgroße Linien bewegen; so sind ihre Geschwindigkeiten einander gleich: bewegen sie sich aber in gleicher Zeit durch ungleichgroße Linien; so sind ihre Geschwindigkeiten ungleich, und verhalten sich gegen einander wie die Linien.

Anmer-

Anmerkung.

§. 17. Ein Körper bewege sich in einer Zeitsecunde durch vier Dresdner Ellen; ein andrer in eben dieser Zeit durch acht dergleichen Ellen: so sind die Geschwindigkeiten beyder Bewegungen einander ungleich, und die Geschwindigkeit der ersten verhält sich zur Geschwindigkeit der andern, wie viere zu achte, oder, nach geschehener Aufhebung, wie eins zu zwey. Das heißt: der zweyte Körper bewegt sich doppelt so geschwind als der erste.

Grundsatz.

§. 18. Wenn zwey Körper, jeder in gleichförmiger Bewegung, sich durch gleichgroße Linien in ungleichen Zeiten bewegen: so sind ihre Geschwindigkeiten ungleich; und derjenige bewegt sich geschwinder, der in einer kürzern Zeit eben diejenige Linie durchgeht, die der andre in einer längern Zeit zurücklegt. Die Geschwindigkeiten verhalten sich demnach in diesem Falle, wie die Zeiten umgekehrt.

Anmerkung.

§. 19. Man denke zwey Linien, jede zwölf Dresdner Ellen lang. Die eine werde von einem Körper in acht Zeitsecunden durchlaufen; die andre von einem andern in vier Secunden. Hier bewegt sich offenbar der zweyte Körper geschwinder als der erste, und zwar so viel Mahl, als viel Mahl kürzer die von ihm gebrauchte Zeit ist. Demnach verhält sich die Geschwindigkeit des ersten Körpers zur Geschwindigkeit des zweyten, wie des zweyten Zeit zur Zeit des ersten; das ist, wie viere zu achte, oder, nach geschehener Aufhebung, wie eins zu zwey. Der zweyte Körper also hat die doppelte Geschwindigkeit des ersten.

Aufgabe.

§. 20. Die Geschwindigkeiten der gleichförmigen Bewegungen (§. 15.) zweyer Körper mit einander zu vergleichen; wenn weder die von beyden durchlaufnen Linien,

noch

noch auch die Zeiten, in welchen die Bewegungen geschehn, gleich sind.

Auflösung.

Der eine von zwey Körpern durchgehe eine Linie von 8 Dresdner Ellen, in 4 Zeitsecunden; der andre durchgehe 20 dergleichen Ellen, in 2 Secunden; und jeder Körper für sich habe eine gleichförmige Bewegung. Um nun das gegenseitige Verhältniß der Geschwindigkeiten von beyden Bewegungen zu finden, mache man zwey Quotienten; und zwar den ersten aus den zwey Zahlen, welche die Geschwindigkeit des ersten Körpers bestimmen, (§. 14.) den andern aus den zwey Zahlen, welche die Geschwindigkeit des andern Körpers bestimmen; doch aber so, daß auf beyden Seiten die Zeitzahl in die Längenzahl der Linie dividirt wird. Diese Quotienten geben das gegenseitige Verhältniß der Geschwindigkeiten beyder Bewegungen an. Im gegenwärtigen Exempel kommen die Quotienten $\frac{8}{4}$ und $\frac{20}{2}$; und so verhalten sich demnach die Geschwindigkeiten beyder Bewegungen gegen einander. Und weil $\frac{8}{4}$ zu $\frac{20}{2}$ sich verhält, wie 2 zu 10, oder kürzer, wie 1 zu 5; so kann man sagen, daß der zweyte Körper sich fünf Mahl geschwinder bewege als der erste.

Beweis.

Wenn man die Zeitzahl der ersten Bewegung, nehmlich 4, in die Linienzahl derselben, nehmlich 8, dividirt; so zeigt der Quotient $\frac{8}{4}$ oder 2, daß sich der erste Körper in jeder einzelnen Zeitsecunde durch eine Linie von 2 Ellen bewegt. Eben so findet man durch Division der Zeitzahl von der zweyten Bewegung, nehmlich 2, in die Linienzahl derselben, nehmlich 20, daß sich der zweyte Körper in jeder einzelnen Secunde durch eine Linie von $\frac{20}{2}$ oder 10 Ellen bewegt. In gleichen Zeiten aber, welche hier beyderseits eine Secunde betragen, verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Linien, durch welche die Bewegungen geschehn;

schehn; (§. 16.) also hier, wie 2 zu 10, oder kürzer, wie 1 zu 5, oder nach den zuerst erhaltnen Ausdrücken der Quotienten, wie $\frac{8}{4}$ zu $\frac{20}{2}$.

Zusatz.

§. 21. Was hier, von (§. 13.) an, über die gerad- und krummlinige Bewegung gesagt worden ist, wird in gegenwärtiger Wissenschaft nur auf wahre relative Bewegung (§. 9.) bezogen, nie auf absolute. (§. 3.) Man sehe zugleich auf (§. 11. und 12.) zurück. Wer die Bewegung der Erdkugel annimmt, wird bald gewahr, daß jede geradlinige Bewegung eines Körpers auf ihr nur relativ geradlinig seyn kann; absolut betrachtet wird sie jedes Mahl krummlinig seyn müssen. Geradlinige absolute Bewegungen finden bey Körpern auf der bewegten Erde niemahls Statt.

Erklärung.

§. 22. Daß ein Ding, ohne eine zureichend wirkende Ursache, aus Ruhe in Bewegung, oder aus letzterer in erstre übergehe, oder daß es, ohne eine solche, seine Bewegung in Absicht der Richtung und Geschwindigkeit abänderu könnte, ist undenkbar. Es muß daher für die angeführten Fälle jedes Mahl eine zureichende Ursache da seyn. Diese Ursache der Bewegung oder ihrer Abänderung wird eine Kraft genennt.

Erfahrung.

§. 23. Kräfte bemerken wir an allen Dingen, die wir kennen; an Körpern sowohl als an Geistern.

Zusatz.

§. 24. Man erläutre sich dieses aus allgemein bekannten Erfahrungen. Ein Bleygewicht z. E., das an einer Wanduhr angehangen ist, äußert unaufhörlich eine Kraft, durch den Zug der Schnure das eine Rad in Bewegung zu

setzen;

setzen; dieses Rad äußert nun gegen ein anliegendes eine Kraft, durch den Druck dasselbe zu bewegen, u. s. w. In der Taschenuhr äußert die größre zusammengerollte Stahlfeder eine Kraft sich aufzuwinden und dadurch ihr metallnes Behältniß in die Runde zu bewegen. Dieses bewegt dann durch einen Zug an der Kette das erste Rad, und ein Rad theilt durch seine Kraft immer einem andern die Bewegung mit. Wenn man ein Messer am Heft mit der Klinge niederwärts hält, und es dann aus der Hand frey in die Luft läßt; so wird es durch eine Kraft erdwärts bewegt, dringt vermöge derselben mit der Spitze in die hölzernen Zimmerdielen ein, und bewegt die Theile des Holzes seitwärts hin theils weiter auseinander, theils dichter zusammen, um zwischen ihnen Raum für sich zu gewinnen. Eben so bekannt und leicht zu bewerkstelligen sind die Erfahrungen von den Kräften der Geister, durch welche sie auch auf Körper wirken. Jeder weiß es, daß er selbst, der ein Geist ist, durch seine Kraft, den einen oder den andern Theil des zunächst mit ihm verbundenen Körpers bewegen, die Augen wenden, einen Arm oder einen Fuß heben kann. Vermittelst der erregten Kraft dieses seines Körpers kann der menschliche Geist sich auch selbst in Bewegung versetzen; wenn er nehmlich die Füße seines Körpers schrittweise fortbewegt. Durch seinen Körper kann er ferner fremde Körper bewegen; eine Kugel mit der Hand fortrollen, einen Stein mit dem Fuße aus dem Wege stoßen. Nicht weniger ist bekannt, daß auch rückwärts Körper durch ihre Kräfte auf Bewegung der Geister wirken können. Wenn ein Arbeiter von einem Gerüste, dessen Breter durch die Kraft seines Körpers zerbrochen werden, herab fällt; so wird zunächst sein Körper durch seine Kraft erdwärts bewegt, und zwar wider den Willen des ihn regierenden Geistes. Gleichwohl kann dieser jenen nicht zurück halten, sondern muß sich die Bewegung, so unangenehm es ihm auch seyn mag, selbst mittheilen lassen. Wenn beym Aufsteigen auf einen Berg ein starker, losgerißner Stein, durch seine Kraft, entgegen rollt, dessen

Körper

Körper wird von demselben herabwärts in Bewegung gesetzt, und dieser theilt, durch seine erhaltne Kraft, die Bewegung dem mit ihm verbundnen Geiste unwiderstehlich mit.

So lehrt auch die Erfahrung, daß die Geister der Thiere auf die zunächst mit ihnen verbundenen Körper, und durch dieselben auch auf andre Körper bewegende Kräfte äußern, und daß die Kräfte der Körper auch auf die Bewegung thierischer Geister rückwärts wirken können.

Anmerkungen.

§. 25. Auf die bewegenden Kräfte nicht nur der Körper, sondern auch der Geister, ist in der Mechanik oft Rücksicht zu nehmen; weil die letztern nicht selten zu Bewegungen vorzüglich nutzbar angewendet werden. Man denke an Menschen, welche Maschinen in Bewegung setzen müssen, bald mit der Hand, z. E. die Wagenwinde und die Haspel, bald mit dem Fuße, z. E. das Spinnrad und die Schleifermaschine, bald auf andre Weise. In Absicht der Thiere denke man an die Mühlen, die von Pferden in Bewegung gesetzt werden.

§. 26. Wegen Kürze des Ausdrucks wird künftig ordentlicher Weise von dem menschlichen und auch thierischen Körper so gesprochen werden, als ob ihm selbst und seinen Gliedern die bewegenden Kräfte zukämen, die doch, wie vorhin gesagt ist, von dem Geiste, der den mit ihm zunächst verbundnen Körper bewegt, abhangen. So wird es niemanden irren können, wenn er den Ausdruck findet: daß die Hand einen Körper halte, ziehe oder drucke; daß die Hand ihre Kraft verstärke; daß die Hand dem Drucke irgend eines Körpers widerstehe. Stillschweigend wird in solchen abgekürzten Ausdrücken jederzeit die Wirkung des menschlichen Geistes auf die Hand vorausgesetzt.

Erklärung.

§. 27. Eine Kraft heißt todt, wenn sie zwar Bewegung zu wirken strebt, aber von der Ausführung ihres Bestre-

strebens durch ein Hinderniß zurückgehalten wird. Eine Kraft heißt lebendig, wenn sie jenes Bestreben zur Ausführung bringen kann und Bewegung wirkt. Die gerade Linie, nach welcher eine todte Kraft Bewegung anzufangen strebt, oder eine lebendige dieselbe wirklich anfängt, heißt die Richtungslinie der Kraft.

Anmerkung.

§. 28. Bey der Annahme der Meinung von der stets fortwährenden Bewegung der Erde, muß zugleich angenommen werden, daß irgendwo auf ihr, durch Anwendung menschlicher oder anderer Kräfte, eine absolute Bewegung anzufangen oder zu beendigen unmöglich ist. (§. 3.) Denn auf der bewegten Erde kann der Anfang aller absoluten Bewegung nur von der Kraft des Schöpfers selbst, da er sie entstehen ließ, abgeleitet werden, und seit jenem Zeitpuncte dauert in allem, was auf ihr ist, die absolute Bewegung unaufhaltsam fort. Es lassen sich also von uns darüber keine Versuche anstellen, ob die Kraft eines erschaffnen Wesens eine absolute Bewegung anfangen, oder, wenn sie angefangen ist, wieder zum Stillestand bringen könne. Davon aber sind die Erfahrungen bekannt und leicht zu erlangen, daß auch absolute Bewegungen, durch beliebige Anwendung von Kräften, in ihren Richtungen und Geschwindigkeiten von uns abgeändert werden können. Wenn nun in gegenwärtiger Wissenschaft gleichwohl vom Anfange oder Beendigung einer Bewegung irdischer Dinge gesprochen wird; so geschieht dieses bloß in Bezug auf wahre relative Bewegung. (§. 9.) Auf diese allein wird nun auch hier, schon der Einförmigkeit und Deutlichkeit des Vortrags wegen, die Abänderung einer Bewegung, in Betrachtung der Richtung und Geschwindigkeit, bezogen; obwohl, wie vorhin gesagt worden ist, in Absicht dieser beyden Umstände, von uns auch auf absolute Bewegungen gewirkt werden kann.

Erfahrung.

§. 29. Wenn ein Körper, etwa eine bleyerne Kugel, an einem Faden aufgehangen ist; so sieht man, daß er vermöge einer gewissen Kraft den Faden so anstrengt, als ob er sich erdwärts bewegen wollte. Wenn der Faden durchschnitten wird; so bewegt sich der Körper wirklich erdwärts, und zwar nach der Richtung der Linie des Fadens.

Erklärung.

§. 30. Diese Kraft des Körpers, vermöge welcher er sich erdwärts zu bewegen strebt, oder wirklich bewegt, nennt man die Schwerkraft oder die Schwere. So lange der Faden die Kugel hielt, war ihre Schwerkraft eine todte Kraft; sobald er aber durchschnitten war, ward sie eine lebendige (§. 27.)

Zusatz.

§. 31. Die gerade Linie, nach welcher der Faden von der an ihm hangenden Kugel angestrengt ward, und nach welcher sie, sobald der Faden durchschnitten war, sich erdwärts bewegte oder fiel, zeigt offenbar die Richtung der Schwerkraft sowohl, als ihrer Bewegung an.

Erklärung.

§. 32. So lange die Schwere eines Körpers eine todte Kraft ist; nennt man dieselbe auch sein Gewicht. Wenn nun in Absicht seiner übrigen Umstände keine Aenderung vorgeht; so bleibt sein Gewicht sich stets gleich, und kann daher ein für alle Mahl nach einem angenommnen Maße, z. E. nach Pfunden und Lothen, ausgedrückt werden. Der Körper wird dann oft selbst ein Gewicht genennt, z. E. ein messingnes Pfundgewicht.

Zusatz.

§. 33. Es ward mit Bedacht gesagt, daß ein Körper sein Gewicht unverändert behalte; wenn sich seine übrigen

Umstän-

Umstände nicht ändern. Denn die Aenderung mancher Umstände ändern allerdings sein Gewicht. Bringt man z. E. einen metallnen Körper aus Deutschland in die Mitte Africas, so findet man sein Gewicht verringert; bringt man ihn nach Lappland, so findet man sein Gewicht vergrößert. Auch an einem und demselben Orte kann ein Körper, wegen abgeänderter Umstände in der Atmosphäre, die ihn zunächst umgiebt, sein Gewicht ändern. Ein Schwamm z. E., der an der Wage etwa 4 Loth wiegt, wird an ihr einen Ausschlag geben, wenn die Atmosphäre um ihn feuchter wird, und wird wieder leichter erscheinen, wenn sie sehr trocken ist. Ulloa, ein spanischer Mathematiker, bemerkte als Augenzeuge, daß Baumwolle, mit dem Safte aus einer gewissen Muschel roth gefärbt, an einem und demselbigen Orte in Südamerica zu verschiednen Stunden des Tages verschiednes Gewicht habe *).

Erfahrungen.

§. 34. Zwey Körper können entweder gleiches oder ungleiches Gewicht haben. Denn wenn ein Faden eine kleine eiserne Kugel, die an ihm hangt, vom Falle abhalten kann; so erfährt man doch, daß er endlich zerrissen wird, wenn man immer nach und nach eine größre anhängt.

§. 35. Obwohl die Schwerkraft erdwärts ihre Richtung hat; so kann man es doch leicht durch Hülfe eines biegsamen Körpers, dergleichen ein Faden ist, dahin bringen, daß sie ihre Wirkung auf andre Körper in jeder beliebigen Richtung äußert, selbst in einer von der Erde abwärts gerichteten Linie, die ihrer eignen Richtung gerade entgegen gesetzt ist.

Anmerkung.

§. 36. Es liege auf einem Tische eine Kugel, an welcher ein Faden befestigt ist, der über den Tisch hinab hangt und

*) Ulloas Reise; im neunten Bande der allgemeinen Reisehistorie. S. 139.

und ein zureichend großes Stück Bley trägt. Wenn des letztern Schwerkraft dasselbe erdwärts bewegt und den Faden unverletzt nach sich zieht: so wird eben diese Schwerkraft, vermittelst des Fadens, der Kugel auf dem Tische eine seitwärts gehende Bewegung mittheilen. Wird ein Faden über den Tisch so weggeschlagen, daß er an beyden Seiten hinab hangt, und an der einen eine kleine hölzerne, an der andern aber eine größre bleyerne Kugel trägt: so kann die Schwerkraft der letztern auf die Bewegung der erstern so wirken, daß sie sogar aufwärts in gerader Linie von der Erde weggezogen wird.

Zusatz.

§. 37. Es sind viele andre Kräfte uns zum Gebrauche verstattet, die für sich schon nach mannigfaltigen Richtungen wirken können. Dergleichen ist die Kraft des Windes, des Wassers, der Stahlfedern, der Thiere, und besonders die Kraft der menschlichen Hand; (§. 26.) welche letztre jeder seinem Willen gemäß, auf oder abwärts, oder auch nach jeder Seitenrichtung, in gerader oder krummer Linie, mit abwechselnder Geschwindigkeit bewegen, und durch sie andern Körpern jede dieser Richtungen und Verschiedenheiten in der Bewegung mittheilen kann.

Erklärung.

§. 38. Die Erde ist, wie die Geographie lehrt, ein Körper, der sich von einer Kugel so wenig unterscheidet, daß jeder, nicht allzugroße Theil ihrer Oberfläche, der von Berg und Thal frey ist, als ein Stück von einer wirklichen Kugelfläche betrachtet werden kann. Für ein solches nehme man also die Oberfläche irgend eines ruhigen Teichs an. Eine dergleichen Fläche nun wird eine Horizontalfläche genennt; und jede ganz in ihr liegende Linie, die zwischen zwey Puncten der Fläche als die kürzeste gezogen werden kann, heißt eine Horizontallinie.

Zusatz.

Zusatz.

§. 39. Nach der jetzt gegebenen Vorstellung ist also eine Horizontalfläche eigentlich keine ebene Fläche, sondern sie ist nach allen Seiten wie das Stück einer Kugelfläche gebogen. Die Horizontallinie auf ihr ist also auch keine gerade Linie, sondern der Theil einer Zirkelperipherie um die Erde.

Erklärung.

§. 40. Man wähle um die Mitte der in (§. 38.) angenommnen Teichfläche einen festen Punct, und ziehe durch ihn auf derselben, in Gedanken, nach allen Seitenrichtungen Bogen von größten Zirkeln der Erdkugel. (S. §. 540.) *) Von allen diesen Bogen ziehe man durch ihren gemeinschaftlichen Schneidungspunct, welches eben der angenommne feste Punct ist, Tangenten. (S. §. 361.) Diese alle stehn auf dem Erdradius, der in besagten Punct trifft, und den die gezognen Bogen zum gemeinschaftlichen Radius haben, perpendicular, (S. §. 361.) und liegen also in einerley ebenen Fläche. (S. §. 497. a.)

Diese ebene Fläche heißt, in Rücksicht jenes Puncts, die scheinbare Horizontalfläche, und jede der in ihr gezognen Tangenten, eine scheinbare Horizontallinie.

Zusatz.

§. 41. Im Gegensatz dieser scheinbaren Horizontalfläche, und scheinbaren Horizontallinie, werden nun jene wirk-

*) Man merke auch beym Gebrauche dieses Bandes des mathematischen Lehrbuchs, daß der Buchstabe S, wenn er vor einen angeführten Paragraph, wie hier, gesetzt ist, auf die Geometrie im ersten Bande zurückweist. Findet man aber den Buchstaben A einem angeführten Paragraph vorgesetzt; so wird auf die reine Arithmetik, ebenfalls im ersten Bande zurückgewiesen. Hat aber ein angeführter Paragraph keinen Buchstaben vor sich; so sucht man ihn in gegenwärtiger Wissenschaft selbst.

wirkliche Horizontalfläche und wirkliche Horizontallinie, in (§. 38. 39.), dadurch kenntlich gemacht, daß man sie wahre Horizontalfläche und wahre Horizontallinie nennt.

Erklärung.

§. 42. Verlängert man endlich durch den gemeinschaftlichen Schneidungspunct der Tangenten herauf den Radius der Erde; so wird die hiermit entstehende gerade Linie die Verticallinie jenes Puncts genennt; welche demnach auf der scheinbaren Horizontalfläche sowohl, als auf jeder scheinbaren Horizontallinie perpendicular steht. (G. §. 497. 333.) Jede ebene Fläche, in welcher die Verticallinie liegt, heißt eine Verticalfläche, und steht auf der scheinbaren Horizontalfläche auch perpendicular. (G. §. 493.)

Zusätze.

§. 43. Ob nun wohl die wahre und scheinbare Horizontalfläche eigentlich nur im angeführten Schneidungspuncte der Tangenten zusammen treffen; in den übrigen Puncten aber, je weiter sie von jenem abliegen, mehr und mehr gesondert sind: so beträgt doch auf einer Fläche, die ungefähr an Größe der bisher betrachteten Teichfläche gleicht, diese Sonderung, wegen der Größe der Erdkugel, deren Diameter, nach der Geographie, 1720 geographische Meilen hält *), so wenig; daß man die wahre Horizontalfläche mit der scheinbaren zusammenfallend, und mit ihr als eine und dieselbe ebne Fläche denken kann, auf welcher die Verticallinie perpendicular steht.

§. 44. In diesen Anfangsgründen gegenwärtiger Wissenschaft werden daher beyde Horizontalflächen stets als als eine und dieselbe ebne Fläche angesehn werden können, und

*) Eine geographische Meile beträgt, nach der Angabe von Bode in seiner Geographie, 23661 Rheinländische Fuß. Man kann sich dieselbe vorstellen, wenn man von der Sächsischen Policeymeile etwa einen fünften Theil wegläßt.

und eben so beyde Horizontallinien, die wahre und scheinbare, als eine und dieselbe gerade Linie. So verstehe man künftig die Ausdrücke: Horizontalfläche und Horizontallinie.

§. 45. Die Betrachtungen, Nahmen und Erinnerungen, die bisher auf die Fläche eines ruhigen Teichs angewendet worden sind, können auch auf Wiesen und Felder, die in der Nähe parallel mit ihr sich verbreiten, angewendet werden. Selbst eine, in Vergleich mit der ganzen Erde, nicht große ebene Fläche, welche man sich über der Erde in irgend einer Höhe, die nur nicht die höchsten Berge übersteigt, vorstellt, doch so, daß sie mit der Horizontalfläche, die unter ihr unmittelbar an der Erde selbst sich befindet, parallel liegt, wird gleichfalls, in Rücksicht jedes Punctes in ihr, eine Horizontalfläche genennt, und gerade Linien in ihr heißen auch Horizontallinien.

Erfahrung.

§ 46. Wenn man eine Bleykugel oder ein anderes Gewicht an einen Faden befestigt, wie der gemeine Bleywurf zubereitet wird, und, indem die Hand, die den Faden hält, sich allmählig niederläßt, die Kugel unter die Oberfläche eines Teiches senkt; so lehrt die Erfahrung, daß die Richtungslinie der Schwere (§. 31.) auf der Horizontalfläche des Wassers perpendicular steht. Wenn nehmlich an den Faden der Arm eines großen Winkelhakens angehalten wird; so streckt sich der andre, den man nach jeder beliebigen Seitenrichtung der Wasserfläche nähert, parallel mit ihr über sie hin, und berührt sie endlich in allen seinen Puncten zugleich; in so fern nehmlich dieses ein Auge zu beurtheilen im Stande ist.

Zusätze.

§. 47. Die Richtungslinie der Schwere macht also mit einer Horizontalfläche nach allen Seiten rechte Winkel, ist demnach mit der Verticallinie einerley und hat, wie sie, ihre Richtung nach dem Mittelpuncte der Erdkugel, (§. 42.)

§. 48. Da die Richtungslinien der Schwere auf der Erde sich in ihrem Mittelpuncte treffen; so convergiren sie nach ihm hin sämmtlich. Allein wegen der Größe des Erdradius, der nach der Geographie auf 860 geographische Meilen beträgt, neigen sich zwey dergleichen Linien, wenn sie nahe bey einander sind, in ihren Theilen über der Erdfläche so wenig zusammen, daß man sie, ohne merklichen Fehler, für parallel anzunehmen pflegt.

§. 49. Man wird nun den Gebrauch des Bleywurfs, bey Prüfung des verticalen Standes einer geraden Linie oder ebenen Fläche leicht verstehen.

§. 50. Jede gerade Linie auf oder über der Erdfläche (§. 45.) ist eine Horizontallinie; wenn mit ihr die Richtungslinie der Schwere rechte Winkel macht. Jede ebene Fläche auf oder über der Erde ist eine Horizontalfläche; wenn auf sie die Richtungslinie der Schwere unter rechten Winkeln trifft.

§. 51. Jeder wird nun die gemeine Bleywage sich erklären können, und ihren Gebrauch bey Prüfung oder Einrichtung der Horizontalflächen einsehn.

Anmerkung.

§. 52. Man ist hier nur, der bestimmten Absicht gemäß, bey der Schwerkraft der Körper, welche sich, als zunächst zur Erde gehörig, auf ihr befinden, stehn geblieben; in so fern diese Kraft gegen die Erde überhaupt gerichtet ist. Den Erfahrungen und Lehren der Physik gemäß ist nur kurz zu bemerken, daß sich diese Schwerkraft durch den ganzen Weltbau verbreitet, und daß nicht nur alle Kugeln des Himmels, Sonne, Mond und Sterne, dieselbe gegen einander äußern; sondern daß auch auf jeder für sich die zu ihr gehörigen Körper gegen dieselbe eine Schwere haben. So wirket z. E. in den Bergen und der Atmosphäre des Monds auch gegen ihn eine Schwerkraft.

Uebrigens zeigen die Körper auf unsrer Erde, einzeln betrachtet, gegen einander eine Schwerkraft von verschied-

ner Stärke. So lehrt die Erfahrung, daß ein Bleywurf von seiner verticalen Richtung etwas abweicht, wenn nur nach einer Seite von ihm hin ein großes Gebirge in der Nähe liegt. Er zieht sich gegen dasselbe etwas aus seiner gewöhnlichen Richtung hinüber.

Erklärung.

§. 53. Von zwey Kräften, die einander so entgegen wirken, daß beyderseits keine Bewegung erfolgt, sagt man: daß sie sich im Gleichgewicht befinden (in aequilibrio), oder daß sie einander das Gleichgewicht halten.

Anmerkung.

§. 54. Auf einer horizontalen Tischfläche liege ein Stock. An einem Ende drucke ihn eine Hand nach seiner Längenlinie, am andern drucke ihn nach eben derselben eine andre Hand, und dieser andre Druck wirke also dem ersten gerade entgegen. Gesetzt nun, daß weder die Hände noch der Stock dadurch in einige Bewegung kommen; so wird man sagen, daß die druckenden Kräfte der Hände gegen einander im Gleichgewichte sind; oder sich das Gleichgewicht halten.

Man denke einen Cylinder, der so nach einer Horizontallinie aufgelegt ist, daß er um die Achse frey gewendet werden kann. Um ihn sollen zwey Schnuren gewunden seyn, eine nach dieser, die andre nach jener Seite, und an beyden Schnuren sollen Gewichte hangen; deren eines sich also bestreben wird, ihn nach der einen Seite zu drehen, das andre aber, ihn auf die andre, entgegen gesetzte zu wenden. Erfolgt nun gleichwohl keine Bewegung; so sagt man, daß die Schwerkräfte beyder Gewichte sich gegen einander im Gleichgewichte befinden, oder, daß am Cylinder auf beyden Seiten das Gleichgewicht Statt hat.

Anmerkungen.

§. 55. Wegen des bald zu gebrauchenden Beywortes, fest, bey den Körpern gewisser Art, ist im Voraus etwas

zu bemerken. Man theilt nehmlich, wie bekannt ist, die Körper in feste und flüssige ein. Wodurch aber beyde Gattungen eigentlich von einander unterschieden sind deutlich zu erklären, ist, zu unsern Zeiten wenigstens, noch nicht möglich. Jederman weiß dem ungeachtet sehr wohl zu unterscheiden, welchen Körper er für fest, und welchen er für flüssig halten soll. Und mit solchen klaren, obwohl nicht deutlichen, Begriffen von beyden kann man sich hier im Fortgange des Vortrags begnügen.

§. 56. Aeußerliche Kennzeichen für die festen und flüssigen Körper lassen sich zwar verschiedene angeben, die aber doch ihren Unterschied von einander nicht deutlicher machen, als ihn jeder, schon durch die gemeine Kenntniß von ihnen, sich gemacht hat. So sieht man, daß ein flüssiger Körper, z. E. Wasser, in ein oben offnes, nicht zu enges Gefäß, dergleichen ein Trinkglas ist, aufgenommen, seine Oberfläche von selbst ebenet, ausgenommen nahe am Rande; welches ein fester Körper, z. E. Sand, nicht für sich thut, sondern erst durch Schütteln oder Abstreichen dazu gebracht werden muß.

§. 57. Von sehr vielen Körpern weiß man aus der Erfahrung; daß sie, bey veränderten Umständen, bald flüssig, bald fest sind. So ist das Wasser in unsrer Sommerwarme ein flüssiger, in strenger Winterkälte aber ein fester Körper. Zinn ist in der natürlichen Wärme unsrer Atmosphäre, durch alle Jahreszeiten, ein fester Körper; über dem Feuer aber kann es in einen flüssigen verwandelt werden.

Erklärung.

§. 58. Die Statik ist eine Wissenschaft vom Gleichgewichte (§. 53. 54.) der Kräfte (§. 22—37.) fester Körper. (§. 55.)

Die Mechanik ist eine Wissenschaft von Bewegung (§. 8—12.) der Kräfte fester Körper.

Anmer-

Anmerkung.

§. 59. Der gegenwärtige Vortrag hat zunächst die Statik zum Gegenstande; von der Mechanik aber wird nur so viel beygebracht, als zu besserer Einsicht in jene Wissenschaft und zu ihrer Schätzung, in Absicht des Nutzens für das bürgerliche Leben, Anfängern zureichend seyn kann.

Erfahrung.

§. 60. Jeder feste Körper, seine Masse und Figur sey, welche man will, z. E. der hölzerne Conus, *c d*, in (*Fig.* 1.), wenn er im Freyen an einen Faden, *b c*, einer Schnure oder einer Kette aufgehangen und von einer Kraft, etwa von der Kraft des Nagels bey, *b*, gehalten wird, kommt nach verschiednen Schwankungen in Ruhe. Dieses geschieht auch wieder, wenn man ihn nach und nach immer an einem andern Puncte seiner Außenfläche aufhängt.

Zusatz.

§. 61. Die Linie des Fadens, *b c*, in (*Fig.* 1.), und ihre Fortsetzung, *c d*, durch den Körper, ist die Richtungslinie der Schwere (§. 31.) und zugleich die Verticallinie des Aufhängepuncts, *c*, (§. 47.).

Erklärung.

§. 62. Eine solche Richtungslinie, *c d*, (*Fig.* 1.) der Schwere eines Körpers nenne man einen Schwerdiameter von ihm; und jede ebene Fläche, die durch einen solchen Schwerdiameter, nach irgend einer Seitenrichtung gelegt werden kann, nenne man eine Schwerfläche des Körpers, z. E. die Fläche, *a c e*.

Zusatz.

§. 63. Jede dieser Schwerflächen theilt den Körper in zwey Theile, welche einander das Gleichgewicht (§. 53.) halten, denn sonst könnte er nicht stille hangen.

Erklä-

Erklärung.

§. 64. Eines Körpers Außenfläche wird von jeder seiner Schwerflächen geschnitten; z. E. die Außenfläche des Conus (*Fig.* 1.) von der Schwerfläche, *ace*, in den zusammenhangenden drey geraden Linien, *ce* und *eda* und *ac*. Eine solche Schneidungslinie überhaupt, also hier, *cedac*, nenne man die Grenzlinie einer Schwerfläche.

Zusätze.

§. 65. Nun hange man den Körper, gegenwärtig den Conus (*Fig.* 2.), in einem Puncte, *n*, seiner Außenfläche auf, der außer dem vorhin (§. 62.) bemerkten Schwerdiameter, *cd*, liegt; so wird dieser zweyte Aufhangungspunct, *n*, gewiß jedes Mahl in die Grenzlinie (§. 64.) irgend einer von den unzählbaren Schwerflächen bey der ersten Aufhangung (§. 60.) treffen, hier in *cedac*, und jene Schwerfläche wird noch jetzt für die Verticallinie, *nv*, eine Schwerfläche bleiben, weil auf ihren beyden Seiten, wo vorhin das Gleichgewicht war, nichts geändert ist. Weil der Körper jetzt, der Erfahrung (§. 60.) gemäß, endlich wieder in Ruhe hangt; so müssen auch durch seinen jetzigen Schwerdiameter, *nv*, nach allen Seitenrichtungen ebene Flächen gelegt werden können, deren jede den Körper in zwey Theile theilt, die einander das Gleichgewicht halten. Da nun die Schwerflächen bey der jetzigen Aufhangung insgesammt durch den jetzigen Schwerdiameter, *nv*, gehen (§. 62.), und die Schwerflächen der ersten Aufhangung alle durch den ersten Schwerdiameter, *cd*, giengen, beyde Diameter aber nur einen Punct, *o*, gemein haben können: so gehn durch diesen Punct, *o*, alle Schwerflächen, welche in beyden Aufhangungen gedacht werden konnten.

§. 66. Die Grenzlinien aller dieser Schwerflächen (§. 64.) bilden an der ganzen Außenfläche des Körpers (*Fig.* 2.) gleichsam ein so dichtes Netzwerk, daß kein Punct an ihr zu denken ist, in welchem sich nicht eine Grenzlinie von irgend einer Schwerfläche der ersten Aufhangung mit einer

Grenz-

Grenzlinie von irgend einer Schwerfläche der zweyten Aufhangung schneidet. Nur die Puncte bleiben ausgenommen, welche außer den Puncten, *n* und *v*, in die Grenzlinie der Schwerfläche, *c e d a*, fallen, als welche der ersten und zweyten Aufhangung gemein ist.

§. 67. Wenn man nun einen dritten Aufhangungspunct für den Körper, außerhalb der eben jetzt bemerkten Grenzlinie, wählt so wird man jedes Mahl einen Punct treffen, der sowohl in einer Grenzlinie von einer Schwerfläche der ersten Aufhangung, als auch in einer Grenzlinie von einer Schwerfläche der zweyten Aufhangung sich befindet. Hangt man in diesem Puncte den Körper auf; so werden, nach seinem erlangten Stillestande (§. 60.), die zwey angezeigten Schwerflächen, weil auf beyden Seiten einer jeden von ihnen nichts verändert worden ist, auch noch Schwerflächen für gegenwärtige dritte Aufhangung bleiben, und ihre verticale Schneidungslinie wird jetzt ein Schwerdiameter seyn. Da nun dieser in jeder von beyden liegt und in jeder den Schwerdiameter, der in ihr sich schon aus den vorigen Aufhangungen befindet, schneiden muß; so kann er dieses nur in dem Puncte thun, den beyde gemein haben, nehmlich im Puncte, *o*. Da übrigens durch den Schwerdiameter dieser dritten Aufhangung wieder alle Schwerflächen derselben gehen; so gehn auch diese alle wieder durch den Punct, *o*. Auf eben solche Art wird nun alles ausfallen, wenn man den Körper nach und nach in noch andern Puncten aufgehangen denkt. Und also befindet sich im Körper ein Punct, durch welchen alle seine nur möglichen Schwerdiameter und Schwerflächen gehen, und durch welchen nach jeder Richtung eine ebene Fläche gelegt werden kann, die den Körper in zwey Theile theilt, welche mit einander im Gleichgewichte stehn.

§. 68. Was die Ausnahme betrifft, die (§. 66.) in Rücksicht der Puncte gemacht ward, welche (*Fig.* 2.) in der Grenzlinie, *c e d a c*, von der Schwerfläche, *c e a*, außerhalb den Puncten, *n* und *v*, liegen; so läßt sich von jenen Puncten auch besonders erweisen, daß, im Fall der Körper an-

an einem von ihnen, bey der dritten Aufhangung, angebracht worden wär, der Schwerdiameter, und also auch jede ihm zugehörige Schwerfläche, gleichfalls durch den Punct, *o*, hätte gehn müssen. Denn gesetzt, man hätte für die dritte Aufhangung des Conus den Punct, *k*, gewählt; und man wollte annehmen, daß dann der neue Schwerdiameter nicht durch, *o*, gegangen wär: so hätte er jede der Linien, *cd* und *nv*, in einem besondern Puncte, etwa in, *h* und *m*, treffen müssen. Nun würden aber, vermöge der bisherigen Betrachtungen, die Schwerflächen der dritten und der ersten Aufhangung durch den Punct, *m*, die Schwerflächen hingegen der dritten und zweyten Aufhangung durch den Punct, *h*, gehen. Dieses kann nicht seyn; weil schon erwiesen ist, daß die sämmtlichen Schwerflächen der ersten beyden Aufhangungen durch einen und denselben Punct, *o*, sich erstrecken, der den zwey Linien, *cd* und *nv*, gemeinschaftlich zugehört.

Erklärung.

§. 69. Der Punct eines Körpers nun, durch welchen ihn eine ebene Fläche nach jeder Richtung in zwey Theile theilt, die einander das Gleichgewicht (§. 53.) halten, heißt sein Mittelpunct der Schwere, (centrum gravitatis). Dergleichen war (*Fig.* 2.) der Punct, *o*, im Conus, *cea*.

Zusätze.

§. 70. Jeder Körper hat demnach einen Mittelpunct der Schwere, und zwar nur einen einzigen. Ihn hat auch jeder noch so irreguläre Körper; denn der ausgeführte Beweis läßt sich allgemein anwenden. Dieser Punct aber liegt nicht bey jedem Körper in seiner Masse, wie es bey dem betrachteten Conus war; sondern bey vielen liegt er außer ihr. Bey einem goldnen Fingerringe z. E. fällt er in den Raum, den das Gold mit seiner innern Oberfläche umgiebt.

§. 71. Es folgt ferner, daß der Mittelpunct der Schwere eines Körpers schon durch den Schneidungspunct zwey-

zweyer Schwerdiameter bestimmt werde, und daß, sobald nur ein Schwerdiameter des Körpers bekannt ist, man hiermit wenigstens schon die gerade Linie weiß, in welcher irgendwo der Schwerpunct liegen muß.

§. 72. Wenn ein Schwerdiameter eines Körpers in irgend einem seiner Puncte vertical an einem Faden, oder was dem gleich gilt, aufgehangen wird, und zwar so, daß der Faden selbst in der Verticallinie des Aufhangepuncts liegt: so muß der Körper stille hangen, und der Faden das ganze Gewicht des Körpers tragen. Ingleichen, wenn ein Schwerdiameter eines Körpers, in verticaler Richtung, durch einen feststehenden Punct irgendwo unterstützt wird: so muß der Körper stille liegen; und jener Punct trägt das ganze Gewicht des Körpers.

§. 73. Daher kann man denn auch, welches in vielen Fällen zur Erleichterung der Untersuchungen dient, mathematisch annehmen, daß im Mittelpuncte der Schwere eines Körpers sein ganzes Gewicht vereinigt sey; ob es wohl, nach der physischen Wahrheit, dnrch alle seine Theile zerstreut ist.

Erklärung.

§. 74. Der Mittelpunct der Größe (centrum magnitudinis) eines Körpers ist derjenige Punct, durch welchen ihn eine ebene Fläche nach allen Richtungen in zwey gleichgroße Theile theilt.

Zusätze.

§. 75. In der Kugel z. E. ist er mit ihrem geometrischen Mittelpuncte einerley; denn eine, durch den letztern gelegte ebene Fläche wird die Kugel nach allen Richtungen in zwey Halbkugeln, das ist, in zwey gleich große Theile schneiden. Beym Würfel wird der Mittelpunct der Größe im Schneidungspuncte zweyer Diagonalen, deren jede von einer Spitze des Körpers nach der gegenüberstehenden geführt wird, zu finden seyn; bey dem Cylinder im Mittelpuncte seiner Achse, u. s. w.

§. 76.

§. 76. Es liegt aber dieser Punct bey manchem Körper nicht in seiner Masse, sondern außer ihr. Bey einer hohlen, metallnen Kugel z. E., bey welcher das Metall rings umher gleich dick ist, liegt er im Mittelpuncte des Raums, den die Kugelschale einschließt; wie jedem, der die geometrischen Anfangsgründe kennt, sogleich klar ist.

§. 77. Allein nicht alle Körper haben einen solchen Mittelpunct der Größe; wie folgendes Exempel lehrt. Man denke über der ebenen Fläche, *a b*, (*Fig.* 3.), die aus sechs gleichgroßen Quadraten besteht, einen Körper von Holz, dessen Theile die sechs Würfel sind, welche, als ein Ganzes betrachtet, über jenen Quadraten Raum haben. Jeder Würfel, einzeln betrachtet, wird offenbar der sechste Theil des Körpers seyn. Nun durchschneide eine ebene Fläche über der Linie, *c d*, den Körper perpendicular: so wird sie ihn in zwey gleichgroße Theile schneiden; indem auf jeder Seite drey von seinen sechs g eichgroßen Würfeln liegen. Irgendwo in dieser schneidenden Fläche müßte also der Mittelpunct der Größe des Körpers seyn; wenn er einen solchen hätte. Ferner durchschneide man den Körper nach der Linie, *f g*, mit einer ebenen Fläche, und zwar wieder perpendicular; so wird auch diese ihn in zwey gleichgroße Theile theilen: indem auf jeder ihrer Seiten drey seiner Würfel liegen. Es müßte nun der Mittelpunct der Größe irgendwo auch in dieser schneidenden Fläche sich finden, und also in der Linie, welche beyde schneidende Flächen gemein haben. Dieses ist die Linie, welche man in der Figur über dem Puncte, *o*, auf der Fläche, *a b*, perpendicular stehend zu denken hat. In dieser Perpendiculare wär demnach der Mittelpunct der Größe für den ganzen Körper zu suchen; und alle übrigen Flächen, die durch sie gehen, müßten ihn nun auch in zwey gleichgroße Theile theilen. Dieses aber geschieht nicht. Denn man lege durch den angezeigten Perpendikel die schneidende Fläche nach der Linie, *h i*; so hat sie auf einer Seite nur zwey Würfel des Kör-

pers,

pers, auf der andern aber vier, und halbirt den Körper nicht. Er hat daher keinen Mittelpunct der Größe.

Solcher Körper kann man sehr leicht viel mehrere angeben. Zum Beweise aber des Satzes, daß nicht alle Körper einen Mittelpunct der Größe haben, ist es schon genug, solches nur an einem zeigen zu können, wie jetzt geschehen ist.

§. 78. Bey manchen von denjenigen Körpern, denen der Mittelpunct der Größe nicht fehlt, ist derselbe mit dem Mittelpuncte der Schwere (§. 69.), der Lage nach, einerley. Bey einer Kugel z. E., die in allen ihren Theilen aus gleichartigem und gleichdichtem Golde besteht, fällt jeder von diesen Puncten offenbar in ihren geometrischen Mittelpunct. Bey manchen solcher Körper aber liegt der Mittelpunct der Größe nicht eben da, wo der Mittelpunct der Schwere liegt; z. E. in einer Kugel, die zur Hälfte aus Bley, zur Hälfte aus Holz besteht.

Erklärungen.

§. 79. Unter einem mathematischen, geradlinigen Hebel (vectis) versteht man eine mathematische, gerade, unbiegsame und, wegen der ersten Bestimmung, zugleich schwerlose Linie, *a b*, (*Fig.* 4.), welche sich um einen ihrer Puncte, *c*, frey wenden kann, der aber selbst, an seinem Orte, durch irgend ein Mittel erhalten wird. Ein solcher Punct, *c*, wird der Ruhepunct des Hebels genennt; und dasjenige, was ihn an seinem Orte erhalten soll, heißt die Widerlage oder Unterlage (hypomochlium).

§. 80. Einen solchen Hebel, *a b*, (*Fig.* 5.), wie er jetzt beschrieben ward, dessen Ruhepunct in, *c*, seyn mag, denke man nun in einer bestimmten Lage; etwa hier, in einer horizontalen. An den Puncten, *a* und *b*, sollen zwey Kräfte wirken, z. E. die Schwerkräfte der Gewichte, *L* und *K*. Beyde sollen an Fäden aufgehangen, und vermittelst derselben an den Puncten des Hebels, *a* und *b*, befestigt seyn. Die Fadenlinien, *a e* und *b f*, weil sie hier Richtungen

gen

gen der Schwere sind, befinden sich in verticaler und unter sich paralleler Lage (§. 47. 48.), zugleich aber auch mit dem Hebel, *a b*, in einerley ebenen Fläche. Die Puncte, *a* und *b*, in welchen die Kräfte ihre Wirkung am Hebel zunächst äußern, werden die Wirkungspuncte der Kräfte an ihm genennt, und eine jede der zwey Linien, *c a* und *c b*, die bis zu ihnen, vom Ruhepuncte, *c*, her, reichen, heißt ein Arm des Hebels.

§. 81. Eine Perpendicularlinie aus dem Ruhepuncte, *c*, (*Fig.* 5.) auf die Richtungslinie, *a e*, der einen Kraft, *L*, gezogen, heißt die Entfernung derselben Kraft, wenn man sich kurz ausdrückt. (Der vollständige Ausdruck wär: die Entfernung der Richtungslinie der Kraft, *L*, vom Ruhepuncte.) Da in gegenwärtiger Vorstellung der Hebel, *a b*, horizontalliegend angenommen wird, und Schwerkräfte an ihm wirken, die Winkel bey, *a* und *b*, also rechte Winkel sind (§. 50.); so liegen die Entfernungen beyder Kräfte hier in den Hebelarmen selbst, und sind, *c a* und *c b*. In andern Fällen trifft dieser Umstand nicht jedes Mahl so zu.

§. 82. Damit nun der Hebel, *a b*, (*Fig.* 5.) sich zwar um den Ruhepunct, *c* wenden könne; dieser Punct selbst aber an seinem Orte erhalten werde: so denke man sich bey ihm eine schickliche Widerlage; und zwar hier, da ihn die Schwerkräfte erdwärts zu ziehn streben, stelle man ihm ein hölzernes, dreyeckiges Prisma unter, dessen Stand und Durchschnitt der Triangel bey, *d*, andeutet. Es ist offenbar, daß jede der zwey Schwerkräfte den Hebel, nach der Seite hin, wo sie wirkt, niederwärts um den Ruhepunct, *c*, zu drehen strebt. Gesetzt, beyde Kräfte befänden sich gegen einander am Hebel im Gleichgewicht; so würde er gewiß auf keine von beyden Seiten gedreht werden können, sondern in Ruhe bleiben. Wirkten aber die Kräfte ungleich stark; so müßte der Hebel um, *c*, sich drehen und mit dem Arme niederwärts bewegen, an welchem die stärkere Wirkung sich zunächst äußerte.

Zusätze.

Zusätze.

§. 83. Wenn man bey manchen Vorstellungen des mathematischen Hebels Fäden zu denken hat; so denke man auch diese als mathematische, und also schwerlose, aber zugleich, wegen ihrer fernern Anwendung, als durchaus biegsame Linien.

§. 84. Es ist gleichgültig, ob man die Schwerkräfte durch den Zug, wie es bey den angehangnen Gewichten geschah (§. 80.), oder durch den Druck auf den Hebel unmittelbar wirken läßt; wenn nur die Richtungslinien ihrer Wirkungen dieselbigen bleiben. Demnach stelle man auf den Hebel (*Fig.* 6.), welches noch der vorige seyn soll, die beyden Gewichte, *L* und *K*, über die Hebelarme, *c a* und *c b*; doch so, daß ihre Mittelpuncte der Schwere in den Verticallinien, *L a* und *K b*, der beyden vorigen Wirkungspuncte, *a* und *b*, sich befinden. (§. 73.) Die Wirkungen werden noch die vorigen, in Absicht des Hebels, *a b*, bleiben.

§. 85. Der vorige Hebel (*Fig.* 5.) *a b*, könnte auch eine andre Lage haben, als jene horizontale war, z. E. die verticale, wie sie in (*Fig.* 7.) dargestellt ist. Wenn nun hier zwey Hände bey, *K* und *L*, in den vorigen Wirkungspuncten, *a* und *b*, die Fäden, *a L* und *b K*, anzögen, und zwar unter vorigen Umständen; nehmlich, mit den Kräften der vorhin angebrachten Gewichte, in Richtungslinien, *a L* und *b K*, die noch sich parallel sind und am Hebel bey *a* und *b*, rechte Winkel machten und mit ihm also in einerley ebenen Fläche lägen, die Widerlage aber am vorigen Ruhepuncte, *c*, zwar blieb, doch so, daß sie auch hier bey, *d*, den Wirkungen der beyden Kräfte entgegen gestellt wär: so müßte noch das Gleichgewicht am Hebel seyn, wenn es vorhin in seiner horizontalen Lage an ihm gewesen wär. Denn nichts, was auf die Wirkung der Kräfte Einfluß haben könnte, ist verändert worden.

Grundsatz.

§. 86. Wenn zwey gleiche Kräfte in einer und derselben geraden Linie auf einen Punct einander zuwider wirken; so bleibt der Punct in Ruh.

Anmerkung.

§. 87. Wenn z. E. ein Punct, *c*, (*Fig.* 4.) mit zwey Pfund Kraft in der Richtung von *c* nach *b*, sich zu bewegen strebt; eine andre gleich starke Kraft in *a*, aber zieht ihn vermittelst des Fadens, *ca*, in der fortgesetzten Linie der ersten Richtung, *cb*, von *c* nach *a*; so bleibt derselbe Punct, *c*, unbewegt.

Zusätze.

§. 88. Man sehe auf den Hebel, *ab* (*Fig.* 5.) zurück, auf welchen die zwey Schwerkräfte in den Gewichten, *L* und *K*, wirkten. Man setze, daß jetzt zwischen ihnen das Gleichgewicht Statt finde: so wird sich der Ruhepunct, *c*, wie der ganze Hebel, vertical nieder zu bewegen streben. Die Widerlage bey, *d*, aber hindert dieses. Würde sie nun weggenommen; der Punct, *c*, hingegen in seiner Verticallinie an einem Faden von einer Hand mit eben so viel Kraft, als er gegen die Widerlage, *d*, vorhin im Niederdrucke anwendete, aufwärts erhalten: so müßte er noch an seinem Orte bleiben; indem der untre Grenzpunct des Fadens vollkommen die Stelle der vorigen, weggenommenen Widerlage verträt, und daher auch so genennt werden könnte.

§. 89. Nun ist klar, daß sich die Widerlage auf mehr als eine Art denken und vorstellen läßt. Eine mathematische gerade Linie, welche, nach Art der Zapfen eines Wagebalkens, quer durch den Hebel, *ab*, (*Fig.* 5.) im Ruhepuncte, *c*, so gedacht wird, daß sie auf beyden Seiten in feststehenden Zirkelöffnungen frey liegt, vertritt auch die Stelle einer Widerlage, und ist bey manchen Vorstellungen sehr bequem anzuwenden.

Grundsatz.

§. 90. Wenn bey gleichen Kräften alle Umstände, die auf ihre Wirksamkeit Einfluß haben können, einerley sind; so werden gleiche Wirkungen hervorgebracht: und wirken sie dann einander entgegen; so erhalten sie sich im Gleichgewicht.

Zusatz.

§. 91. Es habe der Hebel, *a b*, (*Fig.* 5.) eine horizontale Lage, und die Gewichte an ihm, *L* und *K*, sollen gleich groß seyn. Als Schwerkräfte wirken sie beyde nach Verticallinien, *a e* und *b f*, (§. 47.) und diese sind parallel (§. 48.); befinden sich also mit dem Hebel, *a b*, in einerley ebenen Fläche. Die Winkel bey *a* und *b*, unter welchen die Kräfte mit ihren Richtungslinien am Hebel wirken, sind demnach rechte (§. 50.), und gleich groß. Die geraden Hebelarme, *c a* und *c b*, sollen auch gleich seyn; und da wegen der rechten Winkel bey, *a*, und *b*, die Entfernungen der Kräfte vom Ruhepuncte, *c*, mit den Hebelarmen einerley sind; so gleichen auch sie sich. Es wirken demnach in gegenwärtigem Falle gleiche Kräfte unter gleichen Umständen; so müssen denn, nach (§. 90.), ihre Wirkungen auf den Hebel, *a b*, gleich seyn. Da sie aber den Hebel um den Ruhepunct, nach einander entgegen gesetzten Richtungen, zu wenden streben; so befinden sie sich im Gleichgewicht und der Hebel ruht.

Erklärung.

§. 92. In (*Fig.* 8.) setze man bey, *a c b*, den eben jetzt betrachteten Hebel, mit dem Gleichgewicht der an ihm in, *a* und *b*, wirkenden gleichen Kräfte, unverändert noch ein Mahl; beschreibe aber aus, *c*, mit dem Radius, *c a* oder *c b*, eine Zirkelfläche, *b g a*, so, daß sie mit, *a e* und *b f*, als den Richtungslinien der Kräfte, *L* und *K*, in einerley Ebene liegt. Anstatt der prismatischen Widerlage bey, *d*, wähle man eine, den Punct, *c*, in Rücksicht der Zirkelfläche pendi-

pendicular durchgehende gerade Linie, welche zwar die Zirkelfläche frey um sich laufen läßt, selbst aber unbeweglich ruht. (§. 89.) Da nun, nach (§. 91.), *c b f* und *c a e*, rechte Winkel sind; so sind die Linien, *b f* und *a e*, Tangenten des Zirkels, *a d b*, in den Puncten, *b* und *a*. (G. §. 361.) Man denke nun die mathematischen Fadenlinien, *a e* und *b f*, in den Puncten, *a* und *b*, nicht mehr befestigt, sondern beyde als Theile von einem einzigen Faden, der, von *a*, nach, *g*, und von da ferner nach, *b*, um die Peripherie her liegt, und sie in allen Puncten so anfaßt, wie es ein wirklicher Faden, um eine etwas rauhe hölzerne Scheibe gelegt, thun würde. Bey so gemachter Einrichtung wird bey dieser um, *c*, drehbaren Zirkelfläche, *a g b*, dennoch keine Drehung erfolgen, sondern die Gewichte, *L* und *K*, werden an ihr, wie vorhin am Hebel, *a c b*, gegen einander das Gleichgewicht halten. Denn die Größen der Gewichte sind noch wie am Hebel, *a c b*, und die Umstände, welche an ihm auf ihre Wirkung Einfluß haben konnten, sind theils noch dieselben; theils ist darinnen, vermittelst der angebrachten Zirkelfläche, in Rücksicht beyder Gewichte, alles auf einerley Art so abgeändert worden, daß es eine Verschiedenheit in der Größe ihrer Wirkungen nicht veranlassen konnte.

Eine so eingerichtete Zirkelscheibe heißt eine mathematische Rolle (trochlea), und der Punct, *a* oder *b*, an ihr, in welchem die Fadenlinie, durch die Wirkung einer Kraft in einerley Fläche mit der Rolle, sich von der Peripherie frey macht, wird ein Abwicklungspunct genennt.

Zusätze.

§. 93. Da die Arme des Hebels, *c a* und *c b*, (*Fig.* 8.) nun Radien der Rolle sind, und sein Ruhepunct, *c*, ihr Mittelpunct ist; so kann man den Hebel, *a c b*, verschwinden lassen: und es wird in Absicht der Radien und des Mittelpuncts der Rolle noch eben das wahr bleiben, was vorhin am Hebel erwiesen ist. Dieses kommt auf Folgendes an: Die Schwerkraft, *K*, zieht nur den um die Rolle gelegten

legten Faden, in dem Abwicklungspuncte, *b*, der zugleich ein Grenzpunct des horizontalen Radius, *cb*, ist, nach der Verticallinie, *bf*, an. Der Zug geschieht also am Radius unter einem rechten Winkel, *cbf*, und demnach in seiner Tangente. Der Rolle wird hierdurch eine bestimmte Kraft mitgetheilt, sich nach der Seite hin, wo der Zug geschieht, um ihren Mittelpunct zu wenden, welche aber hier durch die andre, dieser Wendung gerade entgegen wirkende Schwerkraft im Gewichte, *L*, wieder aufgehoben wird. Nun kann anstatt der Schwerkraft, *K*, auch jede Kraft von andrer Art, wenn sie jener nur an Größe gleicht, gesetzt werden; und die Rolle ist offenbar ringsherum, in Absicht der Peripherie, der Radien und ihrer Tangenten, ganz gleichförmig; daher folgt: daß, wenn irgend eine Kraft, die, K, gleicht, in einem andern Abwicklungspuncte, etwa in *g*, den Faden, wie vorhin in einerley Fläche mit der Rolle, anzieht, dieses in einer Tangente geschehen, und auf die Drehung der Rolle dadurch eben so stark gewirkt werden wird, als es durch das Gewicht, *K*, im Puncte, *b*, geschah, demnach auch das Gleichgewicht mit der Kraft in *L* noch unverändert bleiben muß.

§. 94. Weil nun in Absicht des andern Abwicklungspunctes, *a*, (*Fig.* 8.) und der an ihm wirkenden Kraft, *L*, eben das gelten muß, was jetzt von *b*, und der Kraft, *K*, erwiesen worden ist; so folgt: daß an einer Rolle das Gleichgewicht zweyer gleichen Kräfte bleibt, die Abwicklungspuncte mögen genommen werden, wo man will, wenn nur die Richtungslinien der Kräfte in der Fläche der Rolle bleiben und auf ihre Drehung einander entgegen wirken.

§. 95. Durch Anwendung der Rollen wird man demnach der Richtungslinie eines Gewichts, die für sich vertical ist, jede andre beliebige Richtung geben können, ohne dadurch die Wirkung der Schwerkraft im Gewicht abzuändern. Z. E. den Hebel, *ab*, (*Fig.* 7.) hielten die Kräfte zweyer Hände bey *K* und *L* im Gleichgewichte. Ihre Richtungslinien, *bK* und *aL*, waren horizontal. Wollte

man nun hier, anstatt der Hände, zwey Gewichte von gleichem Vermögen mit jenen wirken lassen; so könnten diese es allerdings für sich nicht in horizontaler Richtung thun. Aber wenn bey *K* und *L* (*Fig.* 9.) die vorigen Fäden, *b K* und *a L*, nach Wegziehung der Hände, über Rollen gelegt, und mit Gewichten, welche den Kräften der Hände gleichen, versehn werden, wie es die neunte Figur darstellt: so wird, was man verlangte geschehn; die Gewichte werden nach horizontalen Richtungen am Hebel wirken, und ihn noch wie die Hände im Gleichgewicht erhalten.

Lehrsatz.

§. 96. Wenn am horizontalen Hebel, *a b*, (*Fig.* 5.) mit gleichen Armen, die gleichen Gewichte, *K* und *L*, nach verticalen Richtungslinien, *bf* und *ae*, unter gleichen Entfernungen vom Ruhepuncte, *c*, wirkten, und also nach (§. 91.) sich das Gleichgewicht hielten: so ward die Widerlage, *d*, vom Ruhepuncte, *c*, mit einer Kraft vertical niederwärts gedrückt, die beyden Kräften am Hebel, *K* und *L*, zusammen genommen gleich war.

Beweis.

Die gleichen Schwerkräfte in *L* und *K*, deren jede hier ein Pfund betragen mag, streben, den Hebel, *a b*, vertical niederwärts zu bewegen. Dieser Bewegung ist nichts entgegen gesetzt als die Widerlage, *d*, welche sie also aufhalten muß. Diese unterstützt aber nur den einzigen Punct des Hebels, *c*; dieser Punct demnach muß es seyn, der mit vereinter Kraft beyder Gewichte, das ist hier mit zwey Pfund, vertical nieder zu steigen sucht.

Zusätze.

§. 97. Wird die Widerlage, *d*, (*Fig.* 5.) weggenommen; so strebt der Ruhepunct, *c*, noch mit zwey Pfund niederwärts, nicht anders, als wenn in ihm ein Gewicht

von

von zwey Pfund angehangen wär. Man hange also in ihm ein Gewicht von zwey Pfund an, und nehme dagegen die Gewichte in *L* und *K* weg; so strebt der Hebel mit voriger Kraft nieder.

§. 98. Wär die Widerlage, *d*, (*Fig.* 5.) so schwach genommen worden, daß sie nicht zwey Pfund Widerhalt hätte thun können; so würde sie gebrochen und der Hebel gefallen seyn. Wär sie aber stärker gewählt worden, als zu zwey Pfund Widerhalt nöthig war; so hätte dieses nichts geschadet. Denn sie würde doch nicht mehr Widerhalt gethan haben, als die Kraft betrug, welche auf sie wirkte; im gegenwärtigen Falle nehmlich zwey Pfund.

§. 99. Mathematisch darf man sich allerdings vorstellen, als ob jeder feste Körper, auf den ein andrer mit einer bestimmten Kraft drucket, diesem mit eben so viel Kraft entgegen drucke, so lange er es nur in Rücksicht des Zusammenhanges seiner Theile vermag; und also Druck und Gegendruck im Gleichgewicht sich befinden.

Erklärung.

§. 100. Der mathematische, gradlinige Hebel (§. 79.) hat den Ruhepunct entweder innerhalb der Wirkungspuncte (§. 80.) der an ihm wirkenden Kräfte; und dann heißt er ein Hebel der ersten Art (vectis heterodromus): oder er hat ihn außerhalb jener beyden Wirkungspuncte; und dann heißt er ein Hebel der zweyten Art (vectis homodromus).

Zusätze.

§. 101. Die bisher betrachteten Hebel sind insgesammt Hebel der ersten Art. Dergleichen sieht man also in (*Fig.* 5, 6, 7 und 9). Einen Hebel der zweyten Art aber stellt nun (*Fig.* 10.) dar. Der Hebel, *ca*, ruhe im Puncte, *c*, auf der Widerlage; ein Gewicht, *L*, wirke in *b* auf ihn und strebe, ihn um den Punct, *c*, niederwärts zu drehen. In *a* aber ziehe ein anderes Gewicht, *K*, dessen Faden um eine Rolle, *m*, gelegt ist, den Hebel so an, daß es

ihn um den Ruhepunct, *c*, mit eben so viel Kraft aufwärts zu drehen strebt, als das Gewicht, *L*, dieses niederwärts thut: so werden die Kräfte der Gewichte, *L* und *K*, sich das Gleichgewicht halten, und der Hebel wird um *c* sich weder aufwärts noch niederwärts drehen können. Eins von beyden würde aber geschehn, wenn der Kraft, *L* oder *K*, etwas zugelegt würde. Hier ist demnach ein geradliniger Hebel, dessen Ruhepunct, *c*, außerhalb den beyden Wirkungspuncten, *b* und *a*, der auf seine Drehung arbeitenden Kräfte, *L* und *K*, seine Lage hat. Es ist demnach der angegebene Hebel der zweyten Art.

§. 102. Man denke den Hebel, *c a*, (*Fig.* 10.) horizontal; und wie die Richtungslinie der Schwerkraft in *L* schon für sich vertical ist, und daher unter rechten Winkeln bey *b* wirkt: so lasse man auch die Kraft, *K*, in *a* vermittelst der Richtungslinie, *a m*, unter einem rechten Winkel, mit der Richtungslinie der Kraft, *L*, in einerley ebenen Fläche wirken. Nun werden *c b* und *c a* die beyden Hebelarme seyn; *c b* ist zugleich die Entfernung der Kraft, *L*, vom Ruhepuncte, *c*, und *c a* die Entfernung der Kraft, *K*. Es treffen also, im gegenwärtigen Falle, die Entfernungen mit den Hebelarmen zusammen.

Lehrsatz.

§. 103. Wenn am mathematischen, geradlinigen Hebel, der ersten oder zweyten Art, zwey Kräfte nach Richtungslinien, die mit ihm in einerley ebenen Fläche sind, unter rechten Winkeln wirken: so findet an ihm das Gleichgewicht Statt; wenn die Kräfte sich gegen einander verhalten wie ihre Entfernungen vom Ruhepuncte umgekehrt, oder, welches bey dem hier gesetzten Hebel damit gleichgültig ist, wie die Hebelarme umgekehrt.

Beweis.

A. Man denke den Hebel der ersten Art, (*Fig.* 5.), der in (§. 91.) nach seinen Umständen beschrieben ward. An

ihm ist, vermöge des dort geführten Beweises, das Gleichgewicht. Man setze: die Kraft, *L*, sey ein Pfund, und eben so viel betrage die Kraft, *K*. Jeder Hebelarm, *ca* und *cb*, sey einen Zoll lang. Dem gemäß drückt der Ruhepunct, *c*, nach (§. 97.) mit zwey Pfund vertical niederwärts. Weil nun *L* und *K* gleich sind, und *ca* gleich ist *cb*; so verhält sich hier beym Gleichgewicht offenbar

$$L : K = cb : ca$$

das ist: die Kräfte verhalten sich wie die Entfernungen, oder die denselben gleichgeltenden Hebelarme, umgekehrt. Man sieht aber leicht, daß hier auch folgende Proportion richtig wär:

$$L : K = ca : cb$$

das ist: die Kräfte verhalten sich beym Gleichgewicht hier auch gegen einander wie ihre Entfernungen oder Hebelarme selbst. Es ist nun zu beweisen: daß nur die erstere Proportion von diesem Hebel der ersten Art bleibend gilt, wenn sowohl die Kräfte als auch ihre Entfernungen ungleich werden; und daß eben jene erstere Proportion auch von dem Hebel der zweyten Art, der in den übrigen Umständen mit dem jetzt betrachteten übereinkommt, überhaupt geltend ist.

B. Man verwandle nun den Hebel der ersten Art (*Fig.* 5.) in einen der zweyten, so, daß das Gleichgewicht bleibt, auf folgende Weise. Die Widerlage unter dem Ruhepuncte, *c*, der mit zwey Pfund Kraft vertical niederstrebt, nehme man weg, befestige aber dafür an ihm einen Faden, *cm*, (*Fig.* 11.), welchen in verticaler Richtung aufwärts, über eine Rolle, eine Kraft von zwey Pfund, oder von zwey Mahl *K* anhält; so wird der Hebel noch im Gleichgewicht bleiben (§. 86.). Man nehme vom Puncte, *a*, (*Fig.* 5.) das Gleichgewicht, $L = K =$ 1 Pfund, weg; so wird er mit einem Pfunde Kraft vertical aufwärts streben: aber eine Widerlage über *a* (*Fig.* 11.) erhalte ihn, mit dem Gegendrucke von einem Pfunde (§. 98. 99.), an seinem Orte. Man erblickt nun hier (*Fig.* 11.) einen Hebel der zweyten

Art,

Art, an dem die Kraft, K, oder ein Pfund, mit der Kraft, $2 \times K$, das ist, mit zwey Pfunden, das Gleichgewicht hält; indem die letztre vom Ruhepuncte, a, einen Zoll, die erstre zwey Zoll Entfernung hat; die Hebelarme aber, ac und ab, den Entfernungen gleich sind. Nun ist $ab = 2 \times ac$; und demnach

$$L : 2 \times K = ac : 2 \times ac$$

das heißt: am Hebel der zweyten Art ist das Gleichgewicht, wenn sich die beyden Kräfte gegen einander verhalten, wie ihre Entfernungen vom Ruhepuncte, umgekehrt, oder, wie die Hebelarme, umgekehrt, wenn diese, wie hier, mit den Entfernungen einerley sind.

C. Diesen Hebel der zweyten Art wandle man in einen der ersten um; doch so, daß zwischen K und zwey Mahl K, oder zwischen einem Pfunde und zwey Pfunden, das Gleichgewicht erhalten wird. Man verlängre, in dieser Absicht, die Hebellinie, ab, (*Fig.* 11.) über a hinaus, nach der linken Hand, und mache die Verlängerung gleich der Linie, ac, oder einem Zolle; man setze unter a eine Widerlage, die zwar jetzt noch nichts zu tragen hat, aber es bald thun soll. Die Verlängerung der Hebellinie und die neue Widerlage sehe man in (*Fig.* 12.) wirklich angebracht. Hierauf nehme man dem Puncte, c, das Gewicht, welches ihn mit zwey Pfund Kraft in (*Fig.* 11.), vertical aufwärts hielt, ab; so wird er vertical niederwärts streben, nicht anders, als ob an ihm ein Gewicht von zwey Pfunden angehangen wär. Um ihn aber doch an seinem Orte zu erhalten, hange man in d, (*Fig.* 12.) ein Gewicht von zwey Pfund, oder das zwey Mahl K gleich ist, an. Dieses wird an der Linie, dc, als an einem Hebel, der dem in (*Fig.* 5.) vorgestellten und in (§. 91.) beschriebenen gleicht, mit den zwey Pfunden im Puncte, c (*Fig.* 12.) das Gleichgewicht halten; und so muß der ganze Hebel, db, nun ruhig auf der Widerlage unter a liegen. Sie selbst wird offenbar die beyden herabziehenden Gewichte, und also zusammen drey Pfund zu tragen haben. Es

erscheint

erscheint nun hier ein Hebel der ersten Art, an welchem die Kraft, K, oder ein Pfund, mit der Kraft, $2 \times K$, oder zwey Pfund das Gleichgewicht hält; indem die letztre vom Ruhepuncte, a, einen Zoll, die erstre aber zwey Zoll Entfernung hat, auch über dieses die Hebelarme, ad und ab, einzeln genommen, den Entfernungen, einzeln genommen, gleich sind. Nun ist die Linie, ab, gleich gemacht, $2 \times ad$; und demnach

$$K : 2 \times K = ad : 2 \times ad$$

das heißt: am Hebel der ersten Art ist das Gleichgewicht, wenn sich die beyden ungleichen Kräfte gegen einander verhalten wie ihre, auch ungleichen, Entfernungen vom Ruhepuncte umgekehrt, oder, wie die Hebelarme umgekehrt; wenn sie mit jenen einerley sind.

D. Nun kann man den Hebel der ersten Art, (*Fig.* 12.) nach den Regeln des Abschnittes, B, in diesem Beweise, ferner in einen der zweyten umwandeln, an welchem ein Pfund mit zwey Pfund das Gleichgewicht hält, indem die Entfernungen oder die ihnen hier gleichen Hebelarme umgekehrt auch das Verhältniß, eins zu zwey, haben. Dieser dann erlangte neue Hebel der zweyten Art wird hierauf, nach den Regeln des Abschnittes C, in einen Hebel der ersten Art sich verwandeln lassen, bey dessen Gleichgewicht eine dreyfache Kraft, z. E. drey Pfund, sich zu der einfachen, ein Pfund, wieder verhalten wird, wie die Entfernungen oder Hebelarme umgekehrt. Wenn nun diese Umwandlungen, nach den Regeln bey B und C, so lange man will, wechselsweise fortgesetzt werden; so erscheint immer ein Hebel der ersten Art und dann einer der zweyten abwechselnd. An jedem wird die einfache Kraft mit der mehrfachen im Gleichgewicht befunden; wenn die erstre sich zur letztern verhält wie der letztern Entfernung vom Ruhepuncte zur Entfernung der erstern von ihm, oder wie die Hebelarme umgekehrt. Endlich wird, wenn für die einfache Kraft ein Pfund, und für die Entfernung, oder für den Hebelarm der mehrfachen Kraft ein Zoll angenommen wird, das Vermögen des Hebels dahin gelangen, daß er ein Pfund

mit

mit einer Million Pfunde in das Gleichgewicht bringt, wenn nur die Entfernung des einen Pfundes, oder der ihm zugehörige Hebelarm auch eine Million Zolle beträgt.

E. Bisher ist in der Führung des Beweises die kleinre Kraft stets eine Einheit und die kleinre Entfernung auch eine Einheit gewesen, auf die größre Kraft aber, wie auf die größre Entfernung sind stets mehrere ganze Einheiten gekommen. Dieses war aber zufällig und kam daher, weil man bey dem Anfange des Beweises, im Abschnitte A, setzte, daß am Hebel (*Fig.* 5.) jedes Gewicht ein Pfund und jeder Arm ein Zoll sey. Hätte man dort jede der beyden Kräfte als $\frac{2}{5}$ Pfund, und jeden Hebelarm als $\frac{3}{4}$ Zoll angenommen; so wär (*Fig.* 12.) $K = \frac{2}{5}$ Pfund, aber das andre Gewicht, $2 \bowtie K = \frac{4}{5}$ Pf. $ad = \frac{3}{4}$ Zoll, $ab = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ Zoll. Oder hätte man in (*Fig.* 5.) jedes Gewicht auf sieben Pfund gesetzt, und jeden Hebelarm auf drey Zoll; so wär bey dem Hebel (*Fig.* 12.) $K = 7$ Pf. $2 \bowtie K = 14$ Pf. $ad = 3$ Zoll, $ab = 6$ Zoll. Hätte man ferner (*Fig.* 5.) jedem Gewichte $1\frac{1}{2}$ Pf. und jedem Arme $3\frac{1}{4}$ Zoll gegeben; so würde am Hebel (*Fig.* 12.) seyn $K = 1\frac{1}{2}$ Pf. $2 \bowtie K = 3$ Pf. $ad = 3\frac{1}{4}$ Zoll, $ab = 6\frac{1}{2}$ Zoll.

Hätte man endlich am Hebel (*Fig.* 5.) jedes Gewicht gleich gemacht, $\sqrt{3}$ Pfund, *) und jeden Arm, $\sqrt{2}$ Zoll; so

*) Wenn ein Anfänger nicht sogleich bemerkt, wie ein Gewicht gedacht werden soll, dessen Werth aus einer unvollkommnen Quadratzahl die Quadratwurzel ist, welche sich in Zahlen nie genau finden läßt (A. §. 185.); so erinnre er sich an die Regel der Geometrie (G. §. 478. d.), wie dennoch so eine Wurzel in einer Linie angegeben werden kann. Nun sey ein silberner Cylinder, dessen Gewicht über ein Pfund betrug, nach und nach so abgeschliffen, daß er genau ein Pfund wiegt. Seine Höhe nehme man für die Einheit an und suche, nach dem angeführten

Para-

so wär am Hebel (*Fig.* 12.) $K = \sqrt{3}$ Pf., $2 \times K = 2 \times \sqrt{3}$ Pf., ferner, $ad = \sqrt{2}$ Zoll, und $ab = 2 \times \sqrt{2}$ Zoll. Demnach ist gewiß, daß die gefundne Regel des Gleichgewichts am Hebel dieselbe bleibt, wenn auch die kleinre Kraft und die kleinre Entfernung nicht eben Eins ist, sondern überhaupt in irgend einer ganzen, gebrochnen, gemischten, oder in einer Zahl, dergleichen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ waren, gegeben wird, welche sich nicht in gemeinen Ziffern ausdrücken, aber doch in einer Linie oder einem Körper sich darstellen ließ. Auch hier ist das Gleichgewicht; wenn die kleinre Kraft so viel Mahl ganz in der größern enthalten ist, wie viel Mahl der letztern Entfernung ganz in der Entfernung der erstern vom Ruhepuncte gefunden wird. Für die Entfernungen können auch die Hebelarme gesetzt werden, weil sie ihnen gleich sind.

F. Noch immer hat es der Gang des Beweises mit sich gebracht, daß bey dem Gleichgewicht am Hebel die schwächre Kraft in der stärkern, die kleinre Entfernung in der größern, der kürzre Hebelarm in dem längern stets etliche Mahl ganz enthalten, und also der Quotient immer eine ganze Zahl war. Allein auch dieser Umstand ist für die gefundne Regel des Gleichgewichts am Hebel nicht nothwendig; sondern sie besteht noch, wenn auch jene Quotienten nicht ganze Zahlen sind. Dieses ist nun zu erweisen.

G. Es

Paragraph der Geometrie, die Quadratwurzel aus drey in Rücksicht dieser Einheit. Die gefundne Linie gebe man einem andern silbernen Cylinder zur Höhe, und behalte die Grundfläche des ersten bey; so werden sich die zwey Cylinder dem Inhalte und dem Gewicht nach verhalten wie die Höhen, das ist, wie eins zu $\sqrt{3}$. Der letztre Cylinder wird demnach das verlangte Gewicht seyn. Soll ein anderer aus gleichem Metall, $2 \times \sqrt{3}$ Pfund schwer wiegen; so gebe man ihm die doppelte Höhe des vorigen bey bleibender Grundfläche. Wie der Hebelarm $\sqrt{2}$ Zoll gemacht werden kann, ist nun leicht zu verstehn.

6. Es ist ein Grundsatz: daß am Hebel zwischen zwey Kräften, die auf ihn im Gleichgewichte wirken, dieses Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man noch zwey andre Kräfte an ihn bringt, die für sich auch das Gleichgewicht an ihm gegen einander halten. Man erläutre sich diese Wahrheit auf folgende Art. Es sey der Hebel, *af* (*Fig.* 13.) zwölf Zoll lang, welches die Abtheilungen an ihm in der Figur anzeigen. Den Ruhepunct habe er in *c*, daß der kürzre Hebelarm, *ca*, vier Zoll, der längre, *cf*, aber acht Zoll enthält. In den Puncten, *f* und *a*, ziehen unter rechten Winkeln die Gewichte, *K* und 2 × *K*. *K* sey ein Pfund; so ist 2 × *K*, zwey Pfund. Zu ihren Entfernungen vom Ruhepuncte, *c*, haben die Richtungslinien der zwey Kräfte, wegen der rechten Winkel bey *a* und *f*, die Hebelarme selbst. Uebrigens giebt die kleinre Kraft, *K*, in die größre, 2 × *K*, dividirt zum Quotienten eine ganze Zahl, nehmlich zwey, und so auch die kleinre Entfernung, *ca*, oder vier Zoll, in die größre, *cf*, oder acht Zoll. Demnach ist an diesem Hebel der ersten Art, vermöge der Abschnitte, D und E, das Gleichgewicht. Nun hange man in gleichen Entfernungen, *cd* und *cb*, vom Ruhepuncte, *c*, die gleichen Gewichte, *M* und *M*, in den Puncten, *d* und *b*, an. Diese werden für sich, vermöge des Abschnitts, A, das Gleichgewicht halten, und eben deswegen das vorige zwischen *K* und 2 × *K* nicht stören. Am Hebel, *af*, mit den vier Gewichten zusammen wird Ruhe bleiben. Diese wird aber nicht weniger bestehn, wenn man die Gewichte, welche an *a* und *f* einander das Gleichgewicht hielten, zusammen wegnimmt; oder wenn man dieses mit den Gewichten in *b* und *d* thut, und jene hangen läßt.

Man sehe nun diesen Hebel noch von einer andern Seite an. Die Hebellinie, *af* (*Fig.* 13.) denke man Anfangs wieder von allen Gewichten leer; aber so lang und in *c* so unterstützt, wie vorher. Man hange in *f* das Gewicht, *K*, oder ein Pfund an, und im Puncte, *b*, ein Gewicht, *M*, von vier Pfund; welches mit jenem das

Gleich-

Gleichgewicht halten wird, weil die Entfernungen, *cf* und *cb*, vom Ruhepuncte, *c*, wenn sie in umgekehrter Ordnung genommen werden, sich wie zwey Zoll zu acht Zoll, das ist, wie 1 zu 4 verhalten. Ferner hange man in *a* ein Gewicht von 2 ℔ *K* oder zwey Pfund an, und im Puncte, *d*, ein Gewicht, *M*, welches mit ihm das Gleichgewicht halten soll. Auch dieses, *M*, wird dann vier Pfund seyn müssen, weil die Entfernungen, *ac* und *cd*, umgekehrt, sich wie zwey Zoll zu vier Zoll, das ist, wie 1 zu 2, verhalten. Der ganze Hebel, *af*, wird noch in Ruhe seyn. Nun aber sind die beyden Gewichte, *M* und *M*, gleich, denn jedes mußte vier Pfund seyn; sie haben auch gleiche Entfernungen, *cb* und *cd*, jede von zwey Zoll, in Rücksicht des Ruhepuncts, *c*: sie halten also für sich auch mit einander das Gleichgewicht. Werden beyde abgenommen, so wird der Hebel mit seinen zwey übrigen Gewichten dennoch in Ruhe bleiben. Hier ist offenbar, daß man, ohne der Ruhe des Hebels Eintrag zu thun, auch zwey solche Gewichte, die mit einander im Gleichgewichte sind, von ihm abnehmen darf, welche nicht zunächst in Bezug auf einander selbst, sondern auf zwey andre, unter sich verschiedne, Gewichte, die aber doch mit einander im Gleichgewicht sich befanden, angebracht worden waren.

H. Mit Beyhülfe des jetzt erläuterten Grundsatzes läßt sich nun dasjenige, was im Abschnitte F behauptet ward, erweisen. Man nehme den Fall, daß am bisher betrachteten Hebel 5 Pfund mit 7 Pfund in das Gleichgewicht gebracht werden soll, und beweise, daß dieses geschieht, wenn die Entfernungen oder Hebelarme umgekehrt in gleichem Verhältnisse, auch wie 5 zu 7 genommen werden. In dieser Absicht theile man den horizontal liegenden Hebel, *ab* (*Fig.* 14.) in so viel gleiche Theile, als die Summe der Kräfte Einheiten enthält, das ist hier in zwölf. Die Widerlage, *m*, stelle man so unter, daß die einzelnen Hebelarme den einzelnen Kräften, in Rücksicht der Anzahl von Einheiten, gleich werden; hier also in *c*. Denn hiermit kom-

kommen auf den längern Arm sieben, auf den kürzern fünf. An den längern Arm, *c b*, hange man das kleinre Gewicht, fünf Pfund, oder wenn, *K*, ein Pfund gilt, wie es die Figur ausdrückt, das Gewicht 5 ⋈ *K*; und suche den Hebel mit ihm in Ruhe zu bringen. Dieses wird geschehn, vermöge des Abschnitts, E, wenn man am andern Hebelarme im Puncte, *d*, welcher vom Ruhepuncte um eine Einheit des Hebels entfernt liegt, ein Gewicht von 5 ⋈ 7, das ist, von 35 Pfund oder 35 ⋈ *K*, anbringt. Hierauf hange man an das Ende des kürzern Hebelarmes, *c a*, das größre Gewicht von sieben Pfund, oder 7 ⋈ *K*, und damit die Ruhe noch erhalten werde, gebe man dem Puncte, *f*, der am andern Hebelarme von *c* um eine Einheit entfernt ist, ein Gewicht von 5 ⋈ 7, das ist, von 35 Pfund oder 35 ⋈ *K* zu tragen, (nach Abschnitt E). Jetzt halten aber in den Puncten, *d* und *f*, die zwey gleichen Gewichte, jedes von 35 ⋈ *K* mit sich selbst, wegen ihrer gleichen Entfernungen, *c f* und *d c*, das Gleichgewicht; (Abschnitt A) beyde können demnach (vermöge des Abschnittes, G) weggenommen werden, ohne der Ruhe des Hebels zu schaden. Nimmt man sie weg; so werden 5 Pfund mit 7 Pfund am Hebel, *a b*, im Gleichgewicht erscheinen, indem die Entfernungen oder Hebelarme umgekehrt sich auch wie fünf zu sieben verhalten. Der Quotient übrigens, welcher aus der Division der kleinren Kraft in die größre, und der kleinren Entfernung in die größre entspringt, ist keine ganze Zahl, sondern der unechte Bruch $\frac{7}{5}$, oder die gemischte Zahl $1\frac{2}{5}$; wie dieses hier verlangt ward.

I. Dieser Beweis ist für alle Fälle, in welchen die kleinre Kraft in die größre dividirt keine ganze Zahl zum Quotienten giebt, anwendbar. Wenn man den Fall setzt, daß beyde Kräfte wahre Brüche sind, z. E. $\frac{1}{3}$ Pfund, und $\frac{1}{2}$ Pfund; so ist er auf folgende Art einzurichten. Man bringe beyde Brüche unter einerley Benennung, und addire sie dann:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$
$$= \frac{5}{6}$$

So

So viel Einheiten nun der Zähler dieses letzten Bruchs enthält, so viel gleiche Theile gebe man dem horizontalen Hebel, $a\,b$ (*Fig.* 15.), nehmlich fünf; und setze die Widerlage unter c so, daß auf den einen Hebelarm, $c\,a$, zwey derselben, auf den andern aber, $c\,b$, drey kommen, welches die Zähler der beyden Brüche sind, die addirt wurden. Man hange an den längern Arm, $c\,b$, die kleinre Kraft, $\frac{2}{5}$ Pf., oder, da ein Pfund dem K gleich gelten soll, $\frac{1}{3}\,K$; so wird mit dieser Kraft von $\frac{2}{5}$ Pfund, in der Entfernung einer Einheit des Hebels vom Ruhepuncte, c, auf dem andern Hebelarme, $c\,a$, im Puncte, n, ein Gewicht von $3 \bowtie \frac{2}{5}\,K$, das ist, K, das Gleichgewicht halten. Ferner bringe man am kürzern Arme, $c\,a$, die $\frac{3}{5}$ Pfund $= \frac{1}{2}\,K$ im Puncte, a, an; so wird wieder ein im Puncte, m, am andern Arme, $c\,b$, angehangnes Gewicht von $2 \bowtie \frac{3}{5}$ Pfund $= 2 \bowtie \frac{1}{2}\,K$ $= K$, im Gleichgewichte seyn. (Abschnitt F) Nun können beyden Gewichte, K, in n und m, ohne den Hebel aus seiner Ruh zu bringen, abgenommen werden (Abschnitt G); und die Gewichte, $\frac{1}{3}\,K$ und $\frac{1}{2}\,K$, halten sich das Gleichgewicht, indem die Entfernungen oder Hebelarme umgekehrt wie zwey zu drey sind; das ist, sich wie die Gewichte gegen einander verhalten. Denn

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\,K : \tfrac{1}{2}\,K &= \tfrac{2}{6}\,K : \tfrac{3}{6}\,K \\ &= \tfrac{2}{6} \quad : \tfrac{3}{6} \\ &= 2 \quad : 3. \end{aligned}$$

Wenn die Gewichte als solche Größen angenommen werden, welche sich in Zahlen nicht genau ausdrücken lassen, z. E. $\sqrt{2}$ Pfund, und $\sqrt{3}$ Pfund *); so ist eben dieser Beweis (im Abschnitte H) auf folgende Art einzuleiten. Man ziehe aus zwey sowohl als aus drey die Quadratwurzeln in Zahlen, durch Annäherung vermittelst der Decimalbrüche, so weit man will; aber man gehe bey beyden, in Rücksicht der Bruchnenner, gleich weit. (A. §. 200.) Z. E. hier, der

Kürze

*) Wegen solcher Gewichte sehe man die Note zum Abschnitte E.

Kürze wegen, bey beyden bis auf die Zehntel: so findet man, $\sqrt{2} = \frac{14}{10}$, und, $\sqrt{3} = \frac{17}{10}$. Beyde Brüche sind unvollständig; man kann sie aber, dem angeführten Paragraph gemäß, immer vollständiger finden. Man verfahre indessen mit diesen Decimalbrüchen, $\frac{14}{10}$ und $\frac{17}{10}$, wie vorhin mit den gemeinen. Man gebe nehmlich dem horizontal liegenden Hebel 14 + 17, das ist, 31 gleiche Theile von beliebiger Größe, unterstütze ihn so, daß der eine Arm 14, der andre 17 derselben bekommt, und gehe den Weg, wie vorhin, weiter: so wird man finden, daß das Gleichgewicht erfolgt, wenn sich auch hier die Gewichte gegen einander verhalten, wie ihre Entfernungen umgekehrt. Es wird seyn das kleinere Gewicht, $\frac{14}{10}$ Pfund, zum größern, $\frac{17}{10}$ Pfund, wie des letztern Entfernung, 14 Linieneinheiten des Hebels, zur Entfernung des erstern, welche 17 dergleichen beträgt. Da man nun jede dieser Einheiten des Hebels eben sowohl $\frac{17}{10}$ von einer größern Einheit nennen, und also seinen beyden Armen auch $\frac{14}{10}$ und $\frac{17}{10}$ zueignen kann: so würde, beym Gleichgewichte auf jedem Arme die Quadratwurzel im Längenmaße ausgedruckt liegen, welche der Größe des Gewichts am andern Arme zukommt; wenn anders die Wurzeln genau ausgezogen worden wären. Dieses ist nun zwar nicht geschehen; sie würden aber immer genauer gefunden werden, wenn man die Arbeit der Annäherung nach den arithmetischen Regeln fortsetzte. Da man nun endlich der Wahrheit so nahe käm, daß der Fehler kaum noch merklich blieb; so darf man annehmen, daß wirklich die vollen Wurzeln, beym Gleichgewicht der angenommnen Kräfte, auf beyden Armen liegen müßten. Man darf also, um die Arme und mit ihnen die Entfernungen genau zu bekommen, in gegenwärtigem Exempel, aus 2 und 3 die Quadratwurzeln, nach einer beliebig angenommnen Linieneinheit, durch den Halbzirkel (S. §. 478.) sogleich in Linien suchen und sie auf die Arme des Hebels, nach umgekehrter Ordnung in Rücksicht der Gewichte, zu welchen sie gehören, tragen; so ist der Hebel für das Gleichgewicht genau abgemessen.

K. In

K. In den vorigen Abschnitten, H und I, sind die Beweise der Regeln für das Gleichgewicht nur vom Hebel der ersten Art geführt worden; in allen diesen Fällen aber gelten sie auch vom Hebel der zweyten Art. Um dieses zu erweisen verwandle man nur jedes Mahl den Hebel der ersten Art in einen der zweyten, an welchem das Gleichgewicht bey unveränderten Kräften und Entfernungen bleibt. Für einen einzigen Fall nur braucht dieses hier erläutert zu werden; weil es auf die übrigen eben so anwendbar ist. Es ward z. E. vom Hebel der ersten Art (im Abschnitte H) erwiesen, daß an ihm, wenn die Kräfte sich gegen einander verhalten wie die Entfernungen umgekehrt, auch dann das Gleichgewicht Statt finde, wenn beyde Kräfte zwar in ganzen, aber doch solchen Zahlen angegeben sind, von welchen die kleinre in die gröβre dividirt zum Quotienten keine ganze Zahl bringt. Will man nun beweisen, daß dieses auch vom Hebel der zweyten Art zu behaupten sey; so verwandle man jenen in diesen auf folgende Weise, bey welcher offenbar Kräfte, Entfernungen und Gleichgewicht unverändert bleiben. Es sey ab (*Fig.* 16.) ein Hebel der ersten Art, und K sey ein Pfund. Es hangen an ihm die beyden Gewichte, $2 \times K$ und $3 \times K$. Die Entfernungen oder horizontalen Arme, ca und cb, sind in umgekehrter Ordnung, 2 Zoll und 3 Zoll. Die Einrichtung an diesem Hebel ist also ganz die verlangte; und an ihm ist, vermöge des Abschnitts H das Gleichgewicht. Nun stelle man über den Ruhepunct, c, noch eine Widerlage; nehme dann im Puncte, a, das Gewicht, $3 \times K$, ingleichen die mathematische Linie, ac, sammt der untern Widerlage bey c weg; damit aber der Hebel in Ruhe bleibt, halte man den Punct, d, durch ein Gewicht, $3 \times K$, dessen Faden über eine Rolle geschlagen ist, vertical aufwärts, weil ihn das in a abgenommne Gewicht eben so stark aufwärts hielt: so wird derjenige Hebel erscheinen, welcher in (*Fig.* 17.) dargestellt ist. Dieser ist von der zweyten Art; und bey dem an ihm verbliebenen Gleichgewicht verhält sich noch das Gewicht, $2 \times K$, zum Gewicht,

$3 \times K$,

3 ⋈ *K*, wie des letztern Entfernung oder Hebelarm, *c d*, zur Entfernung des erstern, oder dem Hebelarm, *c b*. Es ist nehmlich, *c d* zu *c b*, wie zwey Zoll zu drey Zoll.

L. Daß bey den bisher betrachteten Hebeln anstatt der Schwerkräfte auch Kräfte andrer Art angewendet werden können, ist leicht einzusehn; und eben so, daß für die horizontale Lage der Hebellinie jede andre gleichgeltend gewählt werden kann, wenn nur die Widerlage derselben gemäß gestellt wird, und die übrigen Umstände bleiben. Man erwäge hierbey wieder, was in (§. 85. und 95.) erinnert ist.

Erklärung.

§. 104. Ein mathematischer Winkelhebel ist ein Linienwinkel, *a c b*, (*Fig.* 18.), dessen Spitze, *c*, an ihrem Orte erhalten wird; doch so, daß er selbst um sie, in der Fläche seiner Schenkel, sich frey wenden kann. Die Winkelspitze, *c*, vertritt den Ruhepunct dieses Hebels, und die Schenkel, *c a* und *c b*, bilden seine Arme. Wenn nun an diesen in *a* und *b* zwey Kräfte wirken; so werden auch hier, wie bey dem geradlinigen Hebel, die Perpendicularlinien, *c a* und *c b*, aus dem Ruhepuncte, *c*, auf die, in einerley ebenen Fläche mit dem Hebel liegenden Richtungslinien der Kräfte, die Entfernungen der letztern (nehmlich vom Ruhepuncte) genennt. Wegen der rechten Winkel bey *a* und *b* sind hier die Entfernungen mit den Hebelarmen einerley Linien.

Grundsatz.

§. 105. Wenn ein Punct, *c*, (*Fig.* 19.) vermittelst einer geraden Linie, *c o*, an welcher im Grenzpuncte, *o*, eine Kraft nach der Richtung, *o m*, wirkt, um sich selbst gedrehet werden soll; so wird auf diese Drehung gleich stark gewirkt werden, wenn nur die Kraft in *m* ihre Wirkungswinkel, *c o m*, und die Länge der Linie, *c o*, unverändert bleibt. Die Richtung der letzten von *c* nach *o* kann hierbey keinen Einfluß haben. Die Drehung muß demnach eben so kräftig erfolgen, wenn auch die Linie, *c o*, in eine

andre

andre Richtung vom Puncte, c, aus, etwa in cd oder ca, gebracht wird; in so fern nur die Linie, $ca = cd = co$, ingleichen die Kraft in $b = n = m$, und der Winkel, $cab = cdn = com$ bleibt.

Lehrsatz.

§. 106. Wenn am Winkelhebel, acb (*Fig.* 18.) die Richtungslinien, bm und an, von zwey Kräften, $2 \times K$ und $3 \times K$, welche in Rücksicht seiner Drehung um den Ruhepunct, c, einander entgegen streben, in der Fläche des Hebels liegen, und unter rechten Winkeln, b und a, auf ihn wirken: so findet sich das Gleichgewicht, wenn die eine Kraft, $2 \times K$, zur andern, $3 \times K$, sich verhält, wie die Entfernung, ca, der letztern zur Entfernung, cb, der erstern, oder wie die den Entfernungen hier gleichgeltenden Hebelarme.

Beweis.

Die Wirkung der Kräfte auf die Drehung des Hebels wird, vermöge des Grundsatzes im vorigen Paragraph, unverändert bleiben; ob man schon, unter Beybehaltung der übrigen Umstände, den Armen, cb und ca, (*Fig.* 18.) vom Ruhepuncte, c, aus, die Richtungen giebt, welche am Hebel, ab, (*Fig.* 16.) dargestellt sind, wo sie nehmlich beyderseits in eine und dieselbe gerade Linie, acb, fallen, und von den Rollen, die in (*Fig.* 18.) bey m und n angebracht waren, weiter kein Gebrauch zu machen ist. Nun ist aber bereits für den Hebel in (*Fig.* 16.) das Gleichgewicht erwiesen worden, wenn $2 \times K : 3 \times K = ca : cb$ war; also ist es, dieser Regel gemäß, auch noch bey dem Winkelhebel, acb, in (*Fig.* 18.).

Zusätze.

§. 107. Man kann demnach jeden geradlinigen Hebel der ersten Art (*Fig.* 16.) in einen Winkelhebel (*Fig.* 18.), und auch den letztern in den erstern umwandeln, so daß Kräfte, Länge der Arme und Gleichgewicht unverändert bleiben.

§. 108. Wenn der Winkel des Winkelhebels, den man aus dem geradlinigen (*Fig.* 16.) durch die angegebene Umwandlung gewonnen hat, endlich Null wird; so entsteht ein Hebel der zweyten Art (*Fig.* 17.), an dem die Kräfte, die Entfernungen, die Armenlänge und das Gleichgewicht im vorigen Zustande bleiben. Wer dieses überlegt, sieht leicht, daß auch ein Hebel der zweyten Art in einen Winkelhebel verwandelt werden kann, der die eben jetzt angeführten Umstände unverändert beybehält. Man darf nur den Rückweg gehn.

Lehrsatz.

§. 109. Es sey ein mathematischer Linienwinkel, *b c d*, (*Fig.* 20.) dessen Schenkel, *b c* und *d c*, unbiegsam sind. Vermittelst einer Widerlage, *h*, soll zwar die Spitze, *c*, an ihrem Orte erhalten werden; doch so, daß der Winkel um sie in seiner Fläche sich frey drehen kann. Wenn nun auf einen Punct, *b*, des einen seiner Schenkel, *c b*, eine Kraft, K, wirkt, die ihre Richtungslinie, *b K*, in der Fläche des Winkels hat, und ihn nach der Seite, *b*, hin um die Spitze, *c*, zu drehen strebt: so wird die Drehung gleich stark bewirkt werden; die Kraft mag entweder in dem angezeigten Puncte, *b*, des Schenkels, *c b*, angebracht seyn, oder in einem Puncte, *d*, des andern Schenkels, *c d*; wenn nur dieser zweyte Punct in die Fortsetzung, *b d*, der ersten Richtungslinie, *b K*, fällt.

Beweis.

Ein Hebel der ersten Art, *a c b*, (*Fig.* 20.) liege horizontal. Sein Ruhepunct sey in *c*, der Arm, *c a*, sey ein Zoll, und der andre, *cb*, drey Zoll lang. In *a* und *b* sollen zwey Schwerkräfte der Gewichte, *L* und *K*, frey wirken, deren eine, *L*, drey Pfund, die andre, *K*, ein Pf. betragen mag. Die Richtungslinien, *a L* und *b K*, sind also vertical, und bey *a* und *b* sind rechte Winkel; daß hiermit die Hebelarme, *c a* und *c b*, zugleich die Entfernungen der Kräfte vom Ruhepuncte, *c*, angeben. An diesem Hebel ist nach (§. 103.) das Gleichgewicht; und der Punct,

c,

c, wird so stark nach b herum sich zu drehen streben, als ihn das Gewicht, L, nach seiner Seite hinum zu drehen sucht. Es werde hierauf in c eine unbiegsame mathematische Linie, cd, angesetzt, so daß sie mit cb einen spitzigen Winkel macht und mit der Richtungslinie, bK, in einerley ebenen Fläche liegt. Dann nehme man das Gewicht, K, ab; so wird der Punct, b, mit einem Pfunde Kraft in der fortgesetzten Richtungslinie, bd, des abgenommenen Gewichts aufwärts streben, und eine auf ihn, in angezeigter Richtung, gestellte gerade Linie, bd, wird eben dieses in jedem ihrer Puncte thun. Man führe diese Linie bis in den Winkelschenkel, cd, fort; so wird ihr Punct, d, der nun im Schenkel, cd, liegt, immer noch mit einem Pfunde Kraft empor drucken, oder, welches gleichviel ist, der Punct, d, des Schenkels, cd, selbst, wird mit einem Pfunde nach der Richtung, bd, aufwärts streben. Man hange aber in diesem Puncte nach der Richtung, dbK, welche hier vertical ist, ein Pfundgewicht, K, an; so wird er sammt dem Schenkel, cd und dem ganzen Winkel, dcb, in Verbindung mit dem Hebel, acb, wieder an seinem Orte erhalten werden.

Zusätze.

§. 110. Der jetzt betrachtete Winkel, bcd, (*Fig.* 20.) soll, wenn er künftig zum Gebrauch angewendet wird, der Kürze wegen, der mechanische Hülfswinkel genennt werden.

§. 111. Hätte die Kraft, K, (*Fig.* 20.) erst am obersten Winkelschenkel, cd, im Puncte, d, gehangen, und wär hierauf dort abgenommen, dafür aber da, wo ihre Richtungslinie, dK, den untern Schenkel, cb, in b traf, angehangen worden: so läßt sich leicht durch den (§. 109.) geführten Beweis zeigen, daß die Kraft im letztern Puncte eben so stark auf die Drehung der Winkelspitze, c, gewirkt haben würde, als sie es im erstern Puncte, d, that.

Lehrsatz.

§. 112. Wenn die Kräfte am Hebel der ersten und zweyten Art, oder auch am Winkelhebel, zwar in einerley

ebenen Fläche mit dem Hebel, aber nicht unter rechten, sondern unter schiefen Winkeln wirken: so liegen ihre Entfernungslinien nicht in den zugehörigen Hebelarmen, sondern außer denselben. Die erstern haben dann eben das Verhältniß gegen einander, welches die letztern haben; wenn entweder beyde Kräfte unter gleichgroßen schiefen Winkeln wirken, oder unter ungleichgroßen, deren Summe aber 180 Grade beträgt.

Beweis.

§. 113. Daß die Entfernungen, *c d* und *c g*, (*Fig.* 21.) der Kräfte, *L* und *K*, am Hebel, *a c b*, nicht in den Armen desselben, *c a* und *c b*, liegen, wenn jene auf diese unter schiefen Winkeln, *L b c* und *K a c*, wirken: dieses ist leicht einzusehn. Denn in solchem Falle stehn die Arme nicht perpendicular auf den Richtungslinien, *a K* und *b L*, der Kräfte, und also können sie selbst auch nicht die Entfernungen seyn; welche vielmehr außer ihnen in den Perpendicularen, *c d* und *c g*, sich befinden.

§. 114. Daß aber die Entfernungen, *c o* und *c d*, (*Fig.* 22.) gleichwohl eben das Verhältniß gegen einander haben, welches bey den Hebelarmen, *c b* und *c a*, Statt findet, wenn beyde Kräfte in *a* und *b* unter gleichgroßen schiefen Winkeln anziehn, *L b c* und *K a c*, ist so zu erweisen. Am geradlinigen Hebel der ersten Art, *a c b*, ziehn die Kräfte, *L* und *K*, nach den Richtungslinien, *L b* und *K a*, unter gleichgroßen stumpfen Winkeln an. Die Entfernungen vom Ruhepuncte, *c*, werden durch die Linien, *c o* und *c d*, angegeben, welche auf die Verlängerungen, *b o* und *a d*, der Richtungslinien perpendicular gestellt sind. In den Triangeln nun, *b o c* und *a d c*, sind die rechten Winkel, *d* und *o*, gleich, und es gleichen sich auch die Winkel bey *a* und *b*, weil sie Nebenwinkel von den gleichgroß gegebenen stumpfen sind. Demnach sind die Triangel ähnlich, (G. §. 461.) und daher ist

$$cb : co = ca : cd \text{ (G. §. 460.)}$$

ferner $cb : ca = co : cd$

das ist: die Entfernungen der Kräfte verhalten sich gegen einander wie die zugehörigen Hebelarme. Es wird nun

nicht

nicht schwer seyn, den gegebenen Beweis auch auf den Hebel der zweyten Art und auf den Winkelhebel anzuwenden.

§. 115. Daß die Entfernungen sich gegen einander auch dann wie die Hebelarme verhalten, wenn die schiefen Winkel, unter welchen die beyden Kräfte am Hebel wirken, zwar nicht gleich sind, aber doch in der Summe 180 Grad betragen, wird auf folgende Art bewiesen. Es sey *cba* (*Fig.* 23.) ein Hebel der zweyten Art. An dem Arme, *ca*, wirke die Kraft, *K*, aufwärts nach der Richtung, *aK*, unter dem spitzigen Winkel, *a*; und an dem Arme, *cb*, wirke die Kraft, *L*, abwärts, nach der Richtung, *bL*, unter dem stumpfen Winkel, *cbL*. Der letztre aber betrage, mit jenem spitzigen, *a*, zusammen genommen, 180 Grad. Man verlängre *Lb* nach *n* hin; so werden die Linien, *Ln* und *aK*, parallel seyn; denn die beyden innern Winkel, *a* und *b*, an der Linie, *ac*, sind 180 Grad (G. §. 376.), indem *b* seinem Verticalwinkel, *cbL*, gleich ist, dieser aber mit *a* 180 Grad betrug. Nun ziehe man aus *c* auf *bn* die Perpendiculare, *cn*, und führe sie bis zur andern Parallele, *aK*, fort; so wird sie auch auf dieser perpendicular stehn. (G. §. 375.) Demnach ist *cn* die Entfernung der Kraft, *L*, und *cK* die Entfernung der Kraft, *K*. Im Triangel, *aKc*, in welchem *bn* mit *aK* parallel ist, muß nun seyn: (G. §. 466.)

$$cb : ca = cn : cK$$

das ist: die Entfernungen verhalten sich auch hier, wie die zugehörigen Hebelarme. Eben dieses, mit leichten Abänderungen im Gange des Beweises, läßt sich auch vom Hebel der ersten Art und vom Winkelhebel darthun.

Zusatz.

§. 116. Es kann aber auch sehr oft geschehen, daß die Entfernungen, wenn sie außer den Hebelarmen liegen, oder wenn wenigstens eine von ihnen dergleichen Lage hat, nicht einerley Verhältniß mit diesen haben. Man sehe, z E. den Winkelhebel, *acd*, (*Fig.* 20.), die Arme von ihm sind *ca* und *cd*, die Entfernungen aber *ca* und *cb*. Die letztern verhalten sich wie Eins zu Drey; die Arme aber wie Eins

zu Drey und darüber, indem *c d* die Hypotenuse im rechtwinkligen Triangel, *c b d*, und also größer als dessen Seite, *c b*, ist. (G. §. 452.)

Lehrsatz.

§. 117. Wenn am mathematischen geradlinigen Hebel der ersten oder zweyten Art, ingleichen am Winkelhebel zwey Kräfte nach Richtungslinien, die mit ihm in einerley ebenen Fläche sind, unter rechten oder auch schiefen Winkeln wirken: so findet das Gleichgewicht Statt, wenn die Kräfte sich gegen einander verhalten, wie ihre Entfernungen vom Ruhepuncte umgekehrt. Das Verhältniß der zugehörigen Hebelarme gegen einander mag nun mit dem Verhältnisse der Entfernungen übereinstimmen oder nicht.

Beweis.

Daß am geradlinigen Hebel der ersten und zweyten Art, wie auch am Winkelhebel, die beyden Kräfte, wenn sie unter rechten Winkeln an den Armen wirksam sind, sich beym Gleichgewicht gegen einander verhalten wie ihre Entfernungen vom Ruhepuncte umgekehrt; dieses ist bereits erwiesen worden. (§. 103. 106.) Und da die Wirkungen der Kräfte unter rechten Winkeln es mit sich brachten, daß die Entfernungslinien den geraden Hebelarmen selbst gleich waren; so konnte man auch jedes Mahl, bey der Regel für das Gleichgewicht, die Entfernungen und die Hebelarme gleichgeltend gebrauchen. Daß nun aber auch, wenn die Kräfte am Hebel unter schiefen Winkeln wirken, das Gleichgewicht zwischen ihnen sich finde, wenn sie sich gegen einander verhalten wie ihre Entfernungen umgekehrt, es mag mit ihrem Verhältnisse gegen einander das Verhältniß der zugehörigen Hebelarme einerley seyn (§. 112.), oder nicht (§. 116.); dieses ist jetzt noch besonders zu erweisen übrig.

Es sey ein Hebel der ersten Art, *a c b*, (*Fig.* 24.) an welchem zwey Kräfte, *L* und *K*, unter schiefen Winkeln, *c b m* und *p a c*, von beliebigen Größen wirken. Die Entfernung der erstern vom Ruhepuncte, *c*, ist die Linie, *c m*,

und

und der zweyten die Linie, *cn*. Anstatt der Widerlage, die sonst bey dem Ruhepunct, *c*, gezeichnet wird, denke man hier, der Bequemlichkeit der Figur wegen, durch ihn einen Zapfen, wie er in (§. 89) angegeben ist. Man erblickt im Winkel, *bcm*, den mechanischen Hülfswinkel, von welchem (§. 109—111.) gehandelt ward, und auf dessen Erklärung man jetzt zurücksehe; und eben so erblickt man diesen Hülfswinkel im Winkel, *acn*. Vermöge dessen, was dort erwiesen worden ist, wirkt die Kraft, *L*, auf die Wendung des Punctes, *c*, gleich stark, sie mag am Schenkel, *bc*, des Winkels, *bcm*, im Puncte, *b*, oder am Schenkel, *cm*, im Puncte, *m*, mit ihrer Richtungslinie, *mb*, angebracht seyn: und eben so wirkt die Kraft, *K*, auf die Wendung des Punctes, *c*, gleich stark, sie mag am Schenkel, *ca*, des Winkels, *acn*, im Puncte, *a*, oder am andern Schenkel, *cn*, im Puncte, *n*, nach der Richtungslinie, *pn*, wirken. Man lasse nun die Kraft, *L*, nicht in *b*, sondern in *m* den Winkel, *bcm*, angreifen; und die Kraft, *K*, greife den Winkel, *acn*, nicht in *a*, sondern in *n* an; so gewähren die Entfernungslinien, *cm* und *cn*, den mathematischen Winkelhebel, *mcn*, dessen Ruhepunct in *c* bleibt, und an dem die Kräfte, *L* und *K*, in *n* und *m* unter rechten Winkeln anziehn. An diesem ist aber, nach (§. 106.), das Gleichgewicht zwischen den Kräften, wenn $L : K = cn : cm$. Also war auch am Hebel, *acb*, unter dieser Bedingung das Gleichgewicht; das heißt: es war, wenn die Kräfte sich verhielten wie die Entfernungen ihrer Richtungslinien vom Ruhepuncte umgekehrt. Man sieht nun, daß die Länge und das gegenseitige Verhältniß der Hebelarme, *ca* und *cb*, bey der Untersuchung des Gleichgewichts hier gar nicht in Betrachtung kam; wie denn auch bey diesem Hebel, *acb*, die Arme, *ca* und *cb*, ein anderes Verhältniß haben, als die Entfernungen, *cn* und *cm*. Demnach erhellet überhaupt, daß die Kräfte bey dem Gleichgewicht am Hebel sich zwar verhalten müssen, wie umgekehrt die Entfernungen, aber nicht eben auch wie umgekehrt die Hebelarme: sondern

daß

daß der letzte Umstand nur bey manchen Hebeln als etwas Zufälliges angetroffen wird. Daß übrigens dieser Beweis auch auf den Hebel der zweyten Art, *c a b*, (*Fig.* 25.) und auf den Winkelhebel, *a c b*, (*Fig.* 26.) angewendet werden kann, wird sich sogleich erkennen lassen, wenn man die jetzt angeführten Figuren, 25 und 26, vor sich nimmt und mit ihnen den dargelegten Beweis vergleicht, und zwar von den Worten an: Es sey ein Hebel der ersten Art, u. s. w. In beyden Figuren, 25 und 26, sind die Buchstaben alle harmonirend mit denen verzeichnet, welche in (*Fig.* 24.) angewendet wurden. Nur lese man das eine Mahl, wenn man (*Fig.* 25.) vor sich nimmt, anstatt der Worte: Es sey ein Hebel der ersten Art, *a c b*, (*Fig.* 24.), die folgenden: Es sey ein Hebel der zweyten Art, *c a b*, (*Fig.* 25.) und wenn man dann (*Fig.* 26.) zu betrachten anfängt, lese man anstatt jener Worte die folgenden: Es sey ein Winkelhebel, *a c b*, (*Fig.* 26.) u. s. w.

Zusätze.

§. 118. Weil es nun bey dem Gleichgewicht, sowohl am geradlinigen als Winkelhebel, nur auf das Verhältniß der Entfernungen, nicht aber der Arme ankommt; so kann auch die Länge und Figur der letztern keinen Einfluß auf das Gleichgewicht haben. Es wird gleichgeltend seyn, ob sie gerade, gebrochne oder krumme Linien sind.

In (*Fig.* 27.) ist der Hebel, *a b c d f*, verzeichnet, dessen Arme, *a b c* und *c d f*, bey *b* und *d* gebrochen sind. An ihm wird aber doch das Gleichgewicht nach voriger Regel seyn, wenn die Kraft, *L*, zur Kraft, *K*, sich verhält, wie die Entfernung, *c m*, der letztern zur Entfernung, *c n*, der erstern. Es wirkt dieser Hebel mit dem geradlinigen, *n c m*, völlig einerley. Man betrachte ferner den Hebel in (*Fig.* 28.) *n b c d f*, dessen beyde Arme, *n b c* und *c d f*, krumme Linien sind. Man suche vermittelst der Perpendicularen aus dem Ruhepuncte, *c a* und *c f*, die Entfernungen der Kräfte, *L* und *K*. Das Gleichgewicht wird seyn, wenn *L* : *K* = *c f* : *c a*. Dieser Hebel wirkt völlig, wie der geradli-

radlinige, acf, wirken würde. Einen Hebel, wie ihn (*Fig.* 27.) vorstellt, kann man einen Hebel mit gebrochnen Armen nennen, und einen solchen, wie ihn (*Fig.* 28.) zeigt, einen krummlinigen Hebel. Beyde Figuren stellen diese Hebel als zu den Hebeln der ersten Art gehörig vor; ein jeder wird aber nun leicht, was gesagt ist, auch auf gebrochne oder krummlinige Hebel der zweyten Art, wie nicht weniger auf dergleichen Winkelhebel anzuwenden wissen.

§. 119. Man stelle sich in (*Fig.* 29.) einen Hebel der ersten Art vor, acb, welcher, gleich einem Wagebalken, im Ruhepuncte, c, mit Zapfen, cf und cp, versehen ist, die beyderseits so an ihrem Orte, bey f und p, erhalten werden, daß ihnen die Wendung um sich frey bleibt. Dergleichen Zapfen sind schon im (§. 89.) vorgestellt worden. Die Hebelarme, ca und cb, sind hier zugleich die Entfernungen der Kräfte, L und K, und das Gleichgewicht findet Statt, wenn $L : K = cb : ca$. Nun verschiebe man den einen Arm, cb, an der Zapfenlinie, pf, hin, bis er in die Lage, nm, kommt, indem er sein Gewicht aus K in Q mit sich trägt. Seine neue Lage, nm, soll aber mit der vorigen, cb, parallel seyn. Das Gewicht, Q, welches mit K einerley ist, wird am Hebelarme, nm auf die Drehung des Punctes, n, in der Linie, pf, und also auch auf die Drehung der Linie, pf, selbst, noch eben so stark wirken, als es in der ersten Lage bey K, am Hebelarme, cb, auf die Drehung des Punctes, c, und zugleich der Linie, pf, wirken konnte. Demnach ist an dem so veränderten Hebel, $acnm$, der ein Hebel mit verschobenen Armen genennt werden kann, noch das Gleichgewicht, wenn $L : Q = nm : ca$, das ist: wenn die Kräfte sich gegen einander verhalten, wie ihre Entfernungen von der Zapfenlinie des Hebels, welche die Stelle des Ruhepuncts vertritt, und daher seine Ruhelinie heißen mag, umgekehrt. Völlig so lassen sich am Hebel der zweyten Art und am Winkelhebel, beyde mögen gerad- oder krummlinig seyn, die Arme verschieben; und wenn nur die Entfernungen der Kräfte von

der

der Ruhelinie, in welche dann der Ruhepunct übergeht, so, wie sie in Rücksicht seiner waren, gelassen werden: so bleibt auch bey ihnen die Regel für das Gleichgewicht unverändert.

§. 120. Wenn am Hebel der zweyten Art, *ca*, (*Fig.* 30.) zwey Kräfte bey *n* und *m* nach den Richtungen, *an* und *am*, an einerley Puncte, *a*, des Hebels wirken; so scheint der Hebel nur einen Arm, *ca*, zu haben, und ist zuweilen, nicht unschicklich, der einarmige Hebel genennt worden. Eigentlich liegen aber die beyden Hebelarme alsdann nur in einander und sind sich gleich. Das Gesetz des Gleichgewichts muß also auch an ihm unverändert bleiben. Wenn nehmlich aus dem Ruhepuncte, *c*, die Entfernungen der Kräfte, *L* und *K*, vermittelst der Perpendicularen, *cn* und *cm*, bestimmt werden; so ist das Gleichgewicht, wenn $L : K = cm : cn$. Man sieht, daß der einarmige Hebel, *ca*, eben das leistet, was der Winkelhebel, *ncm*, leisten kann, wenn an ihm die vorigen Kräfte unter rechten Winkeln wirken.

§. 121. Was bey dem Hebel der ersten Art schon in (§. 85.) gezeigt worden ist, daß nehmlich die horizontale Lage desselben (*Fig* 5.), oder die verticale (*Fig.* 7.), oder auch jede andre, auf das Gleichgewicht der Kräfte an ihm keinen Einfluß haben konnte, wenn nur die übrigen Umstände dieselbigen blieben: das wende man nun auf alle Hebel an. Z. E. der Hebel von der zweyten Art, *cab*, (*Fig.* 25.) behält das Gleichgewicht seiner Kräfte bey, wenn er aus der, dort verzeichneten, horizontalen Lage auch in jede beliebige andre, als etwa in die verticale, versetzt würde; wofern man nur die Arme, *ca* und *cb*, in einander fallend und in unveränderter Länge, ingleichen die Kräfte, nebst den Winkeln und Entfernungen, unter welchen sie am Hebel wirken, unverändert beybehält. Eben so kann es keinen Einfluß auf den Hebel, in Absicht des Gleichgewichts an ihm, haben, wenn, wo Gewichte in den Figuren angebracht

bracht sind, anstatt derselben gleichgroße Kräfte andrer Art, z. E. der Hand eines Menschen, gesetzt werden.

§. 122. Wenn aber auch bey veränderter Lage des Hebels, an dem das Gleichgewicht Statt fand, die Größen der Entfernungen sammt den Winkeln, unter welchen die Kräfte wirken, sich verändern; so besteht doch das Gleichgewicht, wenn nur das Verhältniß der Entfernungen gegen einander das vorige bleibt. Denn nicht auf der Größe der Entfernungen, sondern auf ihrem wechselseitigen Verhältnisse beruhete das Gesetz für das Gleichgewicht der Kräfte. (§. 117.) Es sey *a c b* (*Fig.* 31.) ein Hebel der ersten Art in horizontaler Lage. An ihm wirken zwey Schwerkräfte in den Gewichten, *L* und *K*, welche frey an Fäden und also vertical hangen. Es sey $L : K = cb : ca$, so sind die Kräfte im Gleichgewicht. Ein Druck auf den Arm, *c b*, bringe diesen Hebel in die schräge Lage, *f c g*, und er wird, wenn der Druck wieder weicht, auch in dieser Lage das Gleichgewicht behalten. Die Entfernungen, *c m* und *c n*, sind zwar beyde in Vergleich mit den vorigen, *c a* und *c b*, verändert, indem sie als Theile von jenen offenbar kleiner sind; aber ihr Verhältniß gegen einander ist doch das vorige geblieben. Denn in den Triangeln, *c f m* und *c g n*, sind die Winkel bey *c* als Verticalwinkel gleich, und überdieses haben sie bey *m* und *n* rechte Winkel, indem dort Verticallinien mit einer Horizontallinie zusammen treffen. Die Triangel sind demnach ähnlich. (G. §. 461.)

Daher ist (G. §. 460.) $cn : cg = cm : cf$

und also auch $cn : cm = cg : cf$

Aber $cg = cb$ und eben so $cf = ca$, der Annahme nach.

Daher ist ferner $cn : cm = cb : ca$.

Das heißt: die Entfernungen haben bey der schrägen Lage dieses Hebels noch das Verhältniß gegen einander, welches sie bey seiner horizontalen hatten. Folglich ist an ihm auch noch das Gleichgewicht; er ruht, kommt für sich in keine noch schrägre Lage, kehrt aber auch nicht etwa, wie der

Wage-

Wagebalken einer sogenannten Schnellwage thun würde, in seinen ersten horizontalen Stand zurück.

Erklärung.

§. 123. Das Product aus der Größe einer Kraft in die Größe ihrer Entfernung vom Ruhepuncte des Hebels heißt das statistische Moment derselben Kraft, oder auch nur ihr Moment.

Anmerkung.

§. 124. Am Hebel, *acb*, (*Fig.* 16.) befinden sich die Kräfte $3 \times K$ und $2 \times K$, oder, wenn K einem Lothe gleich gesetzt wird, 3 Loth und 2 Loth. Die Entfernungen, *ca* und *cb*, verhalten sich wie 2 zu 3, oder, wenn die Linieneinheit, *db*, einem Zolle gleich gesetzt wird, wie 2 Zoll zu 3 Zoll. Multiplicirt man nun die Größe der einen Kraft, 3 Loth, das ist, 3, mit der Größe ihrer Entfernung, das ist, mit 2; so entsteht das Product, 3×2, oder 6. Dieses ist das statistische Moment oder das Moment der einen Kraft, $3 \times K$, an diesem Hebel. Das Moment der zweyten Kraft, $2 \times K$, erhält man durch die Multiplication ihrer Größe, 2, in die Größe ihrer Entfernung, 3; und findet es 2×3, oder 6.

Lehrsatz.

§. 125. Bey dem Gleichgewicht am Hebel sind jederzeit die Momente der Kräfte einander gleich; und wenn ihre Momente gleich sind, so ist am Hebel das Gleichgewicht.

Beweis.

Am Hebel, *cba*, (*Fig.* 10.) muß beym Gleichgewicht seyn, $L : K = ca : cb$. Man nenne die Entfernungslinie, *ca*, mit dem Buchstaben *m*, und die Linie, *cb*, mit *n*; so heißt der vorige Satz, $L : K = m : n$. Das Product aber aus den äußern Gliedern dieser Proportion muß dem Producte aus den innern gleich seyn. (A. §. 253.)

Dem-

Demnach ist $L \times n = K \times m$, das heißt: die Momente der beyden Kräfte sind gleich.

Geht man in dieser Betrachtung rückwärts und nimmt bey dem angezeigten Hebel an, daß die Momente der Kräfte gleich sind, oder daß $L \times n = K \times m$; so findet nach (A. §. 256.) folgende Proportion Statt: $L : K = m : n$, und wenn anstatt m und n die gleichgeltenden Linien, ca und cb, wieder gesetzt werden; so ist $L : K = ca : cb$. Das heißt: die Kräfte verhalten sich wie die Entfernungen umgekehrt. Demnach ist zwischen ihnen das Gleichgewicht.

Lehrsatz.

§. 126. Eine Kraft, die an einem Hebelarme unter einem rechten Winkel wirkt, hat die größte Entfernung, die sie, in diesem Puncte ihrer Wirkung, nur haben kann.

Beweis.

Am Hebel, acb, (*Fig.* 32.) wirke an seinem Arme, cb, in b die Kraft, K, unter einem rechten Winkel, cbK; so ist der Arm, cb, selbst ihre Entfernung. Wirkte sie unter dem spitzigen Winkel, y, so wär ihre Entfernung die Perpendiculare, cn; wirkte sie unter dem stumpfen Winkel, cbf, so wär ihre Entfernung die Perpendiculare, cm: aber sowohl cn als cm sind Seiten in den rechtwinkligen Triangeln, cnb und cmb. In beyden vertritt der Hebelarm, cb, selbst die Stelle der Hypotenuse, und ist folglich die größte Seite. (S. §. 452.) Dieser Arm aber war eben die Entfernung der Kraft, K, wenn sie unter einem rechten Winkel wirkte, und also war für sie cb die möglichgrößte Entfernung.

Zusätze.

§. 127. Demnach hat die Kraft bey der Wirkung unter einem rechten Winkel am Hebelarme auch ihr möglichgrößtes Moment, (§. 123.) und vermag auf die Wendung des Ruhepuncts, c, (*Fig.* 32.) nach ihrer Seite in diesem Falle am meisten.

§. 128.

§. 128. Dieses gilt nicht nur vom Hebel der ersten und zweyten Art, sondern auch vom Winkelhebel, wie nicht weniger von dem krummlinigen. Hat ein Hebel von der letzten Art, *nbcdf*, (*Fig.* 28.) einen oder zwey gebogene Arme, so wird die Kraft, *K*, alsdann auf den gebognen Arm, *cdf*, unter einem rechten Winkel, *cfK*, wirken, wenn ihre Richtungslinie, *fK*, auf der geraden Linie, *cf*, welche man aus dem Ruhepuncte, *c*, in den Wirkungspunct, *f*, der Kraft am Hebel zieht, perpendicular steht.

Aufgabe.

§. 129. Für einen Hebel sey die eine Kraft und ihre Entfernung vom Ruhepuncte gegeben, ingleichen die Entfernung der zweyten, noch unbekannten Kraft, welche mit der gegebenen das Gleichgewicht halten soll; die Frage ist: wie kann diese unbekannte Kraft gefunden werden?

Auflösung.

Man schließe: wie die Entfernung der unbekannten Kraft zur Entfernung der gegebenen, bekannten sich verhält; so wird die bereits bekannte Kraft zu der unbekannten sich verhalten. Nun wird man die letzte auf die Art zu suchen haben, wie man zu drey gegebenen Proportionalgrößen die vierte sucht. (A. §. 260.)

Beweis.

Bey dem Gleichgewichte müssen sich die Kräfte gegen einander verhalten wie ihre Entfernungen umgekehrt. (§. 117.) Wenn nun beyde Entfernungen sammt der einen Kraft gegeben sind, so nenne man die letztre *L*, die noch unbekannte aber *K*. Die Entfernung der bekannten nenne man *a*, die Entfernung der unbekannten *b*. So muß seyn (§. 117.):

$$L : K = b : a$$

oder, $b : a = L : K$. (A. §. 257.)

Dieser letzten geometrischen Proportion gemäß zu handeln schreibt nun eben die vorhin gegebene Auflösung vor.

Anmer-

Anmerkung.

§. 130. Die vorgetragne Aufgabe läßt sich auf jede Art der Hebel, die bisher betrachtet worden sind, anwenden. Es soll hier z. E. die Anwendung von ihr auf den geradlinigen Hebel der ersten Art, *a c b*, (*Fig.* 33.) gemacht werden. Seine Lage soll horizontal, und die Kräfte an ihm sollen Gewicht seyn, welche frey, und hiermit vertical, hangen. Bey ihm werden demnach die Entfernungen mit den Längen der Arme einerley seyn. Die größre Kraft, *L*, sey gegeben 12 Loth, ihre Entfernung, *c a*, 3 Zoll, die Entfernung, *c b*, der unbekannten Kraft, *K*, sey 5 Zoll. Die unbekannte Kraft, *K*, nun, die mit *L* das Gleichgewicht halten soll, wird gesucht. Dieses thue man demnach, der Auflösung gemäß, durch die Proportion:

5 Zoll : 3 Zoll = 12 Loth : *K*.

So muß *K* seyn, $\frac{3 \times 12}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$, d. i., $7\frac{1}{5}$ Loth.

Wär nebst den Entfernungen beyder Kräfte die kleinre Kraft, *K*, der Größe nach, $7\frac{1}{5}$ Loth, an dem vorhin bestimmten Hebel gegeben gewesen, und die größre, *L*, hätte sollen gesucht werden; so hätte man aufsetzen müssen:

3 Zoll : 5 Zoll = $7\frac{1}{5}$ Loth : *L*

dann würde *L* gefunden worden seyn:

$\frac{5 \times 7\frac{1}{5}}{3} = \frac{5 \times \frac{36}{5}}{3} = \frac{5 \times 36}{5} : 3 = \frac{36}{3} = 12$, oder 12 Loth.

Arithmetischer Lehrsatz.

§. 131. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweyten Glieds zum zweyten Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Glieds zum vierten Gliede.

Beweis.

Man nehme irgend eine geometrische Proportion, z. E. 8 : 4 = 6 : 3; so muß das Hinterglied, 4, des ersten Verhält-

hältnisses in seinem Vordergliede, 8, so viel Mahl liegen, als das Hinterglied, 3, des zweyten Verhältnisses in seinem Vordergliede, 6, liegt. Das heißt: der Exponent, der im gegenwärtigen Falle 2 ist, muß gleich groß seyn. Legt man nun in jedem der beyden Verhältnisse das Hinter- in das Vorderglied noch ein Mahl mehr, als es schon darinnen liegt, welches durch die Addition geschieht; so steigt in beyden Verhältnissen der Exponent um eins, wird also in beyden wieder gleich groß, und die vier Glieder stehn daher wieder in geometrischer Proportion. Im gegenwärtigen Exempel wird der Exponent 3; und die Proportion ist: $8+4:4=6+3:3$.

Aufgabe.

§. 132. Bey einem Hebel, aus der gegebenen größern und kleinern Kraft und der Summe ihrer Entfernungen, die Entfernung einer jeden einzeln für das Gleichgewicht zu finden.

Auflösung.

Der Hebel sey wieder ganz von der Art, wie er in (§. 130.) angegeben, und in (*Fig.* 33.) vorgestellt ward. Die größre Kraft, L, sey gegeben 12 Loth, die kleinre, K, $7\frac{1}{5}$ Loth, die Summe der Entfernungen, ab, 8 Zoll. Um nun die Entfernung, cb, der kleinren Kraft zu finden, schließe man: wie sich verhält die Summe der gegebenen Kräfte, L und K, zu der gegebenen größern Kraft, L, so verhält sich die gegebene Summe der Entfernungen, ab, zu der gesuchten Entfernung, cb, der kleinern Kraft. Im gegenwärtigen Falle also:

$12+7\frac{1}{5}$ Loth : 12 Loth = 8 Zoll : cb

So muß seyn $cb = \frac{12 \times 8}{12+7\frac{1}{5}}$ Man multiplicire die Factoren im Zähler, und verwandle beyde Theile des Nenners in Fünftel.

$= \frac{96}{\frac{60}{5}+\frac{36}{5}}$

$= 96 : \frac{96}{5} = \frac{96 \times 5}{96} = 5.$

Die

Die Entfernung, cb, der kleinern Kraft ist demnach 5 Zoll. Zieht man diese von der Summe der Entfernungen, 8, ab; so bekommt man auch die Entfernung der größern Kraft, ca, nehmlich 3 Zoll.

Beweis.

Nach (§. 117) und (*Fig.* 33.) muß seyn

$K : L = ca : cb$, das ist im gegebenen Exempel:

$7\frac{1}{5}$ Loth : 12 Loth = 8 Zoll — cb : cb.

Die Entfernung der größern Kraft nehmlich, ca, muß die Summe der Entfernungen, 8 Zoll, weniger die noch unbekannte Entfernung, cb, der kleinern Kraft seyn; das ist: 8 Zoll — cb.

Vermöge (§. 131.) nun kann aus der letzten Proportion richtig abgeleitet werden die folgende:

$$7\tfrac{1}{5} + 12 : 12 = 8 - cb + cb : cb$$

das ist, weil — cb mit + cb sich aufhebt,

$$7\tfrac{1}{5} + 12 : 12 = 8 : cb$$

Und eben so hat die Auflösung den Schluß vorgeschrieben.

Zusätze.

§. 133. Indem durch vorige Aufgabe, bey dem Hebel, ab, (*Fig.* 33.) die beyden Entfernungen, cb und ca, gefunden wurden, ergab sich zugleich die Stelle des Ruhepuncts, c, wo die Widerlage anzubringen war. Hätte man demnach besonders den Ruhepunct suchen wollen; so würde es durch ein gleiches Verfahren haben geschehen können.

§. 134. Hätte die Aufgabe in (§. 132.) einen horizontalliegenden Hebel der zweyten Art mit freyhangenden Gewichten betroffen; so wär der Ruhepunct für sich schon an einer Grenze der Hebellinie bestimmt gewesen, etwa in c, (*Fig.* 35.). Die gefundne Entfernung von 5 Zoll der kleinern Kraft, K, hätte man für die Länge der ganzen Hebellinie, cb, angenommen, und auf dieselbe hinein von c her, die gefundne Entfernung, 3 Zoll, der größern Kraft, L, ge-

L, getragen, da man von *c* bis *a* gekommen seyn würde. Die übrige Einrichtung ergiebt sich aus der Figur selbst.

§. 135. Wär die Frage von einem Winkelhebel, etwa von einem rechtwinkligen, gewesen; so hätten die beyden gefundnen Entfernungen einzeln auf die Schenkel eines rechten Winkels getragen werden können, und die Gewichte wären so anzuordnen gewesen, daß sie, über Rollen, auf die Schenkel in ihren Grenzpuncten perpendicular gewirkt hätten. Der Ruhepunct wär in der Winkelspitze bekannt gewesen.

§. 136. Hätte man einen geradlinigen Hebel verlangt, an welchem die gegebenen Kräfte, der gegebenen Summe ihrer Entfernungen gemäß, unter schiefen Winkeln einander das Gleichgewicht hätten halten sollen: so wär ein beliebiger Winkel, *a c b*, (*Fig.* 34.) zu wählen gewesen; der eine Schenkel, *c a*, wär 3 Zoll, der andre, *c b*, 5 Zoll lang gemacht worden. An ihren Grenzen, *a* und *b*, hätte man die Perpendicularen, *a d* und *b f*, errichtet, und innerhalb derselben durch die Winkelspitze, *c*, eine gerade Linie, *d f*, gelegt. Durch die Fortsetzungen, *d m* und *f n*, der beyden Perpendicularen wären die Richtungslinien der beyden Kräfte, *L* und *K*, vermittelst zweyer Rollen, *m* und *n*, bestimmt gewesen; und nach bereits erwiesenen Sätzen würde am Hebel, *d c f*, dessen Ruhepunct in *c* liegt, das Gleichgewicht gewonnen gewesen seyn.

§. 137. Am Hebel, *a b*, (*Fig.* 16.) wird durch die Gewichte, $3 \asymp K$ und $2 \asymp K$, der Ruhepunct, *c*, mit einem Druck von $5 \asymp K$ niederwärts belegt. (§. 96.) Nähm man nun unter *c* die Widerlage weg, ließ aber diesen Punct vermittelst eines Gewichts von $5 \asymp K$, über eine Rolle geführt, aufwärts an seinem Orte erhalten; so würde der Ruhestand des Hebels unverändert bleiben. Es würden nun aber an diesem Hebel drey Gewichte und keine gewöhnliche Widerlage sich zeigen, indem an der letztern Stelle eben das dritte Gewicht gekommen ist.

Wenn hingegen an eben dem Hebel (*Fig.* 16.) im Puncte,

Puncte, *a*; das Gewicht, $3 \times K$, abgenommen, dafür aber gegen ihn von oben her eine Widerlage angebracht wird; so hält dieselbe einen aufwärtsstrebenden Druck von $3 \times K$ aus. Die bereits gegenwärtige Widerlage unter *c* wird noch von $5 \times K$ niederwärts gedruckt, und in *b* behält das noch einzige übrige Gewicht, $2 \times K$, seine Wirkung. Hiermit erscheint eine gerade Linie, *a b*, die mit zwey Puncten, *a* und *c*, auf Widerlagen druckt, an einem, *b*, aber ein Gewicht trägt, und sich nach den Regeln des Hebels berechnen läßt.

Es lassen sich aber bey dem Hebel, *a b*, (*Fig.* 16. noch auf eine andre Weise zwey Widerlagen und nur ein Gewicht anbringen. Dieses geschieht, wenn man unter *c* die gegenwärtige Widerlage wegnimmt, anstatt ihrer aber ein Gewicht von $5 \times K$ anhangt (§. 97.), und übrigens unter die Puncte, *a* und *b*, nach abgenommenen Gewichten, zwey Widerlagen stellt; die eine unter *a* trägt einen Druck von $3 \times K$, die andre unter *b* einen Druck von $2 \times K$. Demnach erscheint hier eine gerade Linie, *a b*, an welcher der Druck auf zwey Widerlagen, unter den Puncten, *a* und *b*, den sie vermittelst eines Gewichts, das im Puncte, *c*, hangt, bewirket, nach den Gesetzen des Hebels berechnet werden kann.

§. 138. Der Kräfte, die am Hebel in das Gleichgewicht gebracht werden sollen, sind nicht stets nur zwey; sondern es können ihrer auch drey oder mehrere seyn. Man setze, daß am Hebel, *a b*, (*Fig.* 36.) die Kräfte, *L* und *K*, im Gleichgewichte sind, verlängre aber nur den einen Arm, *c b*, bis in *d*, und hange daselbst ein neues Gewicht, *M*, an: so wird das vorige Gleichgewicht nicht bestehn, sondern der Arm, *c d*, wird niedergezogen werden. Will man nun das Gleichgewicht wieder herstellen; so muß offenbar das Gewicht, *L*, einen Zusatz bekommen, welcher *y* heißen mag. Dieser würde, vorigen Sätzen gemäß, durch die Proportion gefunden,

$$ca : cd = M : y.$$

Wenn dann das gefundne Zusatzgewicht, y, mit L so vereinigt würde, wie die Figur zeigt, oder wenn anstatt L und y ein diesen beyden gleichgeltendes einfaches Gewicht in a angehangen würde; so befänden sich am Hebel, ad, die drey Gewichte, $L + y$ und K und M, in Ruhe. Auf gleiche Weise läßt sich ein Hebel mit vier, fünf und mehr Kräften denken, der sie insgesammt im Gleichgewichte trägt.

Aufgabe.

§. 139. Für einen geradlinigen Hebel, an welchem mehr als zwey Kräfte unter rechten Winkeln wirken, den Ruhepunct zu finden, wenn sowohl die Kräfte einzeln, als auch die Lage ihrer Wirkungspuncte am Hebel gegeben sind.

Auflösung mit Beweis.

Es sey eine gerade Hebellinie, acd, (*Fig.* 37.) in horizontaler Lage, an welcher drey gegebene Gewichte vertical, und also unter rechten Winkeln wirken. Das Gewicht, L, sey gleich 48 Loth, $K = 12$ Loth und $M = 4$ Loth. Das Gewicht, L, habe seinen Wirkungspunct in a; das Gewicht, K, den seinigen, 7 Zoll von a, in b, und das Gewicht, M, habe ihn von b weiter hin 4 Zoll in d, daß also der ganze Hebel 11 Zoll lang ist. Um nun den Ruhepunct für den Hebel, ad, zu finden, betrachte man die Linie, bd, welche 4 Zoll enthält, mit den Gewichten, K und M, an ihr, als einen besondern Hebel, und suche an ihm den Ruhepunct, indem man die Entfernung des einen Gewichts, K, von demselben zu finden sucht. Diese Entfernung nenne man indessen y, und bringe sie nach (§. 132.) durch folgende geometrische Proportion heraus:

$$K + M : M = bd : y$$

oder nach Anleitung der gegebenen Zahlen:

$$12 + 4 : 4 = 4 : y$$

$$\text{So ist } y = \frac{4 \times 4}{12 + 4} = \frac{16}{16} = 1.$$

Demnach liegt der Ruhepunct des besondern Hebels, bd,

in

in der Hebellinie von *b* nach *d* hin, einen Zoll weit, in *n*. Man lasse nun in Gedanken die Gewichte, *K* und *M*, für jetzt verschwinden, indem man statt ihrer in *n*, nach weggenommner Widerlage darunter, ein Gewicht, *P*, angehangen denken darf (§. 97.), welches so schwer als *K* und *M* zugleich ist, und also, nach den hier gegebenen Zahlen, 16 Loth enthält. Hierauf suche man für den andern besondern Hebel, *an*, mit seinen beyden Gewichten, *L* und *P*, von welchen das erste in *a*, das zweyte in *n* hangt, den Ruhepunct, indem man die Entfernung der Kraft, *L*, von ihm zu entdecken sucht. Dieses geschieht, vermöge (§. 132.) durch folgende Proportion, in welcher die gesuchte Entfernung durch *x* angegeben wird:

$$L + P : P = an : x$$

oder nach den gegebenen Zahlen:

$$48 + 16 : 16 = 8 : x$$

die gesuchte vierte geometrische Proportionalzahl, *x*, ist also gleich

$$\frac{16 \times 8}{48+16} = \frac{128}{64} = \frac{16}{8} = 2.$$

Der Ruhepunct des besondern Hebels, *an*, und hiermit zugleich der Ruhepunct des gegebenen ganzen Hebels, *ad*, fällt demnach von *a* nach *b* hin, zwey Zoll weit in *c*. Wird da eine Widerlage untergestellt, so trägt auf ihr der Hebel, *ad*, die drey gegebenen Gewichte, *L* und *K* und *M*, sämmtlich im Gleichgewichte.

Zusatz.

§. 140. Wären am Hebel, *ad*, (*Fig.* 37.) mehr als drey Kräfte gegeben, es möchten nun vier, fünf, u. s. w. seyn, für deren Gleichgewicht der Ruhepunct gesucht werden sollte: so würde man auf dem gezeigten Wege auch zum Ziele gelangen; nur wird der Weg immer länger, je mehrere Kräfte gegeben sind.

Aufgabe.

§. 141. Für einen geradlinigen Hebel, an welchem

mehr

mehr als zwey Kräfte unter rechten Winkeln wirken und im Gleichgewicht-seyn sollen, die eine fehlende zu finden, wenn die übrigen einzeln, sammt den Entfernungen aller von dem gegebenen Ruhepuncte und ihren Lagen gegen denselben bekannt gemacht sind.

Auflösung mit Beweis.

Am Hebel, *a d*, (*Fig.* 37.) der schon überhaupt aus (§. 139.) bekannt ist, sey gegeben der Ruhepunct in *c*; die eine Kraft, *L* — 48 Loth; die zweyte, *K* — 12 Loth, und eine dritte, *M*, die mit den gegebenen das Gleichgewicht hält, wird gesucht. Die Entfernungen aller Kräfte vom Ruhepuncte, *c*, sollen bekannt seyn; und zwar die Entfernung, *c a*, der Kraft, *L*, sey gegeben 2 Zoll; der Kraft, *K*, Entfernung = 5 Zoll; der gesuchten Kraft, *M*, Entfernung = 9 Zoll. Die Lage der Kräfte, *K* und *M*, sey auf der einen Seite des Ruhepuncts bestimmt, die Lage der Kraft, *L*, auf der andern. Damit nun die Kraft, *M*, gefunden werde, so suche man zuerst, wie viel die Kraft, *L*, schon von sich aufwendet, um mit der Kraft, *K*, das Gleichgewicht zu halten, und nenne diesen Aufwand indessen *y*. Nun werde geschlossen (§. 117.):

$$ca : cb = K : y$$

oder nach den gegebenen Zahlen,

$$2 : 5 = 12 : y$$

$$\text{So ist } y = \frac{5 \times 12}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

Es werden demnach von der Kraft, *L*, 30 Loth aufgewandt, um die Kraft, *K* = 12 Loth, mit sich im Gleichgewicht zu erhalten. Werden diese 30 Loth von der vollen Kraft, *L*, das ist, von 48 Loth abgezogen, so bleibt noch ein Ueberschuß von 18 Loth, den man mit *x* benenne. Hierauf untersuche man, wie groß das noch unbekannte Gewicht, *M*, seyn muß, wenn es mit diesem Ueberschuß, *x*, das Gleichgewicht halten soll, und schließe (§. 117.):

$$cd : ea = x : M$$

oder

oder nach den gegebenen Zahlen:

$$9 : 2 = 18 : M$$

so ist $M = \frac{2 \times 18}{9} = \frac{2 \times 2 \times 9}{9} = 2 \times 2 = 4$

die gesuchte Kraft, M, beträgt also 4 Loth.

Zusatz.

§. 142. Wären die übrigen Angaben vom Hebel, $a\,d$, (*Fig.* 37.) wie vorhin, aber von den drey Kräften wären K und M einzeln gegeben, und die Kraft, L, sollte gesucht werden: so müßte man auf die Art, welche im (§. 139.) gezeigt worden ist, zuerst an dem besondern Hebel, $b\,d$, seinen Ruhepunct, n, und desselben Vermögen als ein Gewicht, P, suchen. Dieses ward dort gefunden 16 Loth. Hierauf wär der Schluß zu machen (§. 117.):

$$ca : cn = P : L$$

das ist in Zahlen, $2 : 6 = 16 : L$

L wär demnach gleich

$$\frac{6 \times 16}{2} = \frac{2 \times 3 \times 16}{2} = 3 \times 16 = 48 \text{ Loth.}$$

Erklärung.

§. 143. Es lassen sich mehrere Hebel so mit einander verbunden denken, daß, indem immer einer auf den andern durch den Druck wirkt, an den zwey äußersten hiermit zwey Kräfte im gegenseitigen Gleichgewichte erhalten werden. Dieses nennt man zusammengesetzte Hebel.

Anmerkung.

§. 144. Durch Betrachtung von (*Fig.* 38.) wird man sich von zusammengesetzten Hebeln einen zureichend deutlichen Begriff machen können. Es zeigen sich da drey Hebel der ersten Art, $a\,c$ und $c\,e$ und $e\,g$. An den beyden äußersten, $a\,c$ und $e\,g$, wirken in den Puncten, a und g, zwey Gewichte, L und K. Die Widerlagen bey b und d und f sind so gestellt, und die Hebel greifen bey c und e so über

einan-

einander, obwohl nur äußerst wenig, daß die Wirkung des Gewichtes, *L*, vermittelst des Drucks der Hebel bey *c* und *e* bis zur Gegenwirkung des Gewichtes, *K*, auf eine gewisse Art gleichsam fortgepflanzet wird. Man sieht auch die Möglichkeit, daß die beyden Kräfte, *L* und *K*, sich werden in das Gleichgewicht bringen lassen.

Erklärung.

§. 145. In (*Fig.* 38.) liegen die drey zusammengesetzten Hebel horizontal, und die Gewichte, *L* und *K*, sowohl, als der Hebeldruck bey *c* und *e* wirken auf die Hebelarme unter rechten Winkeln. Daher sind die sechs Hebelarme zugleich die Entfernungen der Richtungslinien jedes Gewichts und jedes Drucks. Will man nun an allen Hebeln diejenigen Entfernungen, die mit der Wirkung der einen Kraft, *K*, zunächst in Verbindung stehn, und welches hier die Linien, *fg* und *de* und *bc*, sind, kurz anzeigen; so nenne man sie die correspondirenden Entfernungen für die Kraft *K*; dann werden die correspondirenden Entfernungen für die Kraft, *L*, die Linien, *ab* und *cb* und *ef*, seyn.

Lehrsatz.

§. 146. An zusammengesetzten Hebeln verhalten sich bey dem Gleichgewichte die beyden Kräfte gegen einander, wie die Producte aus den correspondirenden Entfernungen für dieselben umgekehrt.

Beweis.

Wenn an den zusammengesetzten Hebeln (*Fig.* 38.), deren Einrichtung man sich aus (§. 145.) noch ein Mahl vorstelle, die beyden Kräfte, *K* und *L*, im Gleichgewichte gesetzt werden; so ist nothwendig der wechselseitige Druck von den bey *c* zusammentreffenden Hebelarmen gleich groß, und die Stärke eines jeden Drucks einzeln kann also mit einerley Buchstaben, nehmlich mit dem beygesetzten *c* bezeichnet werden. Eben so muß dann der wechselseitige Druck von den bey *e* zusammentreffenden Hebelarmen gleich groß

seyn,

seyn, und die Stärke eines jeden Drucks einzeln kann auch mit einerley Buchstaben, nehmlich mit dem beygesetzten *e*, angegeben werden. Dieses voraus gesetzt, und vermöge (§. 117.) sind folgende drey geometrische Proportionen richtig:

$$K : e = fe : fg$$
$$e : c = dc : de$$
$$c : L = ba : bc$$

Man mache aus jeden drey Gliedern, welche in diesen drey Proportionen unter einander stehn, ein Product; so werden die hiermit entstehenden vier Producte vermöge (A. §. 268.) wieder in einer geometrischen Proportion sich befinden. Nehmlich:

$$K \times e \times c : e \times c \times L = fe \times dc \times ba : fg \times de \times bc$$

Man dividire die beyden Glieder des ersten Verhältnisses einzeln durch einerley Größe, nehmlich durch $e \times c$; so bleibt die Proportion richtig. (A. §. 266.)

$$\frac{K \times e \times c}{e \times c} : \frac{e \times c \times L}{e \times c} = fe \times dc \times ba : fg \times de \times bc$$

das ist, $K : L = fe \times dc \times ba : fg \times de \times bc$

das heißt: bey dem Gleichgewicht am zusammengesetzten Hebel verhält sich die eine Kraft zur andern, wie das Product aus den correspondirenden Entfernungen für die letztre zum Product aus dem correspondirenden Entfernungen für die erste.

Aufgabe.

§. 147. Wenn die eine Kraft gegeben ist und über dieses alle einzelnen Entfernungen bestimmt sind, an zusammengesetzten Hebeln die andre Kraft zu finden, welche mit der gegebenen das Gleichgewicht hält.

Auflösung.

Gesetzt, man sollte dieses in Rücksicht der zusammengesetzten Hebel (*Fig.* 38.) ausführen, und es wäre gegeben die eine Kraft, $K =$ 10 Loth; die Entfernung, ba 3 Zoll; $bc =$ 7 Zoll; $dc =$ 1 Zoll; $de =$ 6 Zoll; $fe =$ 2 Zoll,

und

und $fg = 5$ Zoll: so wird die andre Kraft, L, gefunden, wenn man schließt: Wie das Product aus den correspondirenden Entfernungen für die unbekannte Kraft, L, sich verhält zum Producte aus den correspondirenden Entfernungen für die bekannte Kraft, K; so muß sich verhalten die bekannte Kraft, K, zur unbekannten, L. Das ist im gegenwärtigen Falle:

$$ba \times dc \times fe : bc \times de \times fg = K : L$$

oder in Zahlen:

$$3 \times 1 \times 2 : 7 \times 6 \times 5 = 10 : L$$

demnach ist die gesuchte Kraft, $L = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 10}{3 \times 1 \times 2}$

Wenn mit 6 aufgehoben wird $= \frac{7 \times 5 \times 10}{1}$

$= 350$

Die Kraft, L, beträgt also 350 Loth; und diese halten mit 10 Loth am gegebenen Hebel das Gleichgewicht.

Beweis.

Dieser folgt sehr leicht aus der letzten Proportion im (§. 146.); man darf in derselben nur das letzte Verhältniß zum ersten und das erste zum letzten machen (A. §. 257.); so wird es die Proportion, welche gegenwärtige Auflösung vorschrieb.

Zusatz.

§. 148. Nach der jetzt gegebenen Auflösung wird man nun auch zu verfahren wissen, wenn bey dem betrachteten Hebelwerke die Kraft, L, gegeben wird, und die Kraft K, für das Gleichgewicht mit jener gesucht werden soll.

Aufgabe.

§. 149. Es sollen, in Rücksicht des Gleichgewichts an zusammengesetzten Hebeln folgende Stücke gegeben seyn, als: 1) die Anzahl der Hebel; 2) beyde an ihnen wirkende Kräfte einzeln; 3) die correspondirenden Entfernungen für

die

die eine von beyden Kräften, auch einzeln. Es ist die Frage: Wie soll man die correspondirenden Entfernungen für die zweyte Kraft einzeln finden?

Auflösung.

Die Angaben mögen folgende seyn. Die Anzahl der Hebel = 3; die größre Kraft = 350 Loth; die kleinre Kraft = 10 Loth; die correspondirenden Entfernungen für die größre Kraft, einzeln = 3 und 1 und 2, nehmlich jedes Mahl Zolle. Um nun für das Gleichgewicht an den Hebeln die correspondirenden Entfernungen für die zweyte kleinre Kraft zu finden, verfahre man also. Man mache ein Product aus den gegebenen correspondirenden Entfernungen für die eine Kraft, und aus eben dieser Kraft selbst, welches hier die größre der gegebenen ist. In dieses Product dividire man mit der zweyten Kraft, das ist hier, mit der kleinern. Den erlangten Quotienten zerfälle man in so viel Factoren als Hebel sind; hier in drey. In diesen Factoren hat man dann die verlangten correspondirenden Entfernungen für die zweyte Kraft.

In gegenwärtigem Exempel ist demnach das zu machende Product $3 \times 1 \times 2 \times 350$; dieses beträgt 2100. Der gesuchte Quotient ist hier $\frac{2100}{10}$, das ist 210. Die Zerfällung desselben in die hier nöthigen drey Factoren kann so geschehn, daß man ihn erst in seine kleinsten Factoren auflöst, welches 7, 3, 2 und 5 sind, und dann zwey darunter, welche man will, etwa 3 und 2, in einen, nehmlich in 6, zusammenzieht. Hiermit hat man die drey gesuchten Factoren, 7 und 6 und 5, erhalten.

Beweis.

Wenn die hier gesuchten drey correspondirenden Entfernungen für die gegebene kleinre Kraft, w, y und z, genennt werden; so ist vermöge (§. 146.)

$$10 : 350 = 3 \times 1 \times 2 : w \times y \times z$$

demnach ist, $w \times y \times z = \frac{3 \times 1 \times 2 \times 350}{10}$

Man

Man zerfälle 350 in 35 × 10; hebe dann den Bruch mit 10 auf, und lasse den Factor 1 da er nicht vermehrt, weg.

$$= \frac{3 \times 1 \times 2 \times 35 \times 10}{10}$$
$$= 3 \times 2 \times 35$$
$$= 3 \times 2 \times 5 \times 7$$
$$= 6 \times 5 \times 7$$

Die gesuchten drey Factoren, oder die drey gesuchten Entfernungen für die kleinre Kraft, 10 Loth, sind demnach 6 Zoll, 5 Zoll, und 7 Zoll.

Zusatz.

§. 150. Will man die drey zusammengesetzten Hebel in einer Zeichnung darstellen, wie dieses hier in (*Fig.* 38.) geschehen ist; so mache man drey Summen. Zu jeder nehme man eine von den drey gegebenen correspondirenden Entfernungen für die größre Kraft, die in der Figur *L* heißt, und eine von den gefundnen drey correspondirenden Entfernungen für die kleinre Kraft, die in der Figur mit *K* bezeichnet ist. Die drey Summen können im gegenwärtigen Falle seyn, $3+7$ und $1+6$ und $2+5$. Die sämmtlichen Ziffern beziehn sich auf Zolle, die in der Figur verkleinert dargestellt sind. Hiermit hat man die drey Hebel, *ac* und *ce* und *eg*, bestimmt, und zugleich ihre Ruhepuncte, *b* und *d* und *f*. Die übrigen Umstände der Zeichnung sind aus ihrer Ansicht verständlich.

Man hätte aus den zwey Mahl drey Ziffern die drey Summen auch anders zusammensetzen können, z. E. $3+5$ und $1+7$ und $2+6$; dann würden zwar drey andre Hebel entstanden seyn, aber das Gleichgewicht der zwey gegebenen Kräfte hätte auch an ihnen Statt gehabt.

Aufgabe.

§. 151. Wenn die beyden Kräfte, welche mit einander das Gleichgewicht halten sollen, gegeben sind, die Einrichtung der zusammengesetzten Hebel für dieselben anzugeben.

Auflösung mit Beweis.

Die kleinre gegebene Kraft sey 3 Loth, die größre 100 Loth.

Loth. Nun weiß man aus (§. 146.), daß, beym Gleichgewicht an zusammengesetzten Hebeln, die Kräfte gegen einander sich verhalten müssen, wie die Producte aus den correspondirenden Entfernungen für sie umgekehrt. Da es also bey diesen Producten nicht auf ihre Größe für sich, sondern nur auf das Verhältniß gegen einander ankommt; so darf man sogleich die Zahlgrößen der beyden gegebenen Kräfte selbst dafür annehmen, die gewiß mit den Kräften in geometrischer Proportion stehn. Demnach setze man im gegenwärtigen Falle, 3 Loth: 100 Loth = 3: 100, so werden 3 und 100 die beyden Producte aus den correspondirenden Entfernungen für die beyden Kräfte seyn können. Allein, dem angeführten Satze gemäß, muß man diese beyden Producte umgekehrt mit den beyden Kräften verbinden, daß nehmlich 100 auf die Kraft von 3 Loth, 3 aber auf die Kraft von 100 Loth den Bezug bekommt. Verlangt man nun nur zwey zusammengesetzte Hebel; so bedarf man auch für jedes Product nur zwey Factoren. Man setze daher $3 = 3 \times 1$, und $100 = 10 \times 10$; so werden die correspondirenden Entfernungen, einzeln, für die größre Kraft, 3 und 1, etwa in Bezug auf Zolle, seyn; an dem einen Hebel nehmlich 3 Zoll. am andern 1 Zoll; die einzelnen correspondirenden Entfernungen aber für die kleinre Kraft werden 10 und 10 genommen werden müssen; an dem einem Hebel nehmlich 10 Zoll, und an dem andern auch 10 Zoll. Nach den Regeln in (§. 150.), mit Zunahme der dort beygelegten Figur, läßt sich nun dieses Hebelwerk leicht in einer Zeichnung darstellen. Verlangte man aber drey Hebel, so sind für jedes der beyden Producte drey Factoren nöthig. Man setze: $3 = 3 \times 1 \times 1$, oder auch, $3 = 2 \times 1\frac{1}{2} \times 1$; ferner, $100 = 4 \times 5 \times 5$, oder auch $100 = 2 \times 10 \times 5$. Das fernere Verfahren ist wie vorhin.

Zusätze.

§. 152. Wählt man, nach vorigem Paragraph, die zwey Hebel, und zwar geradlinig von der ersten Art, so daß die Kräfte an ihnen unter rechten Winkeln wirken,

und

und setzt man sie in einerley ebene Fläche neben einander; so beträgt ihre ganze Länge, in einer Richtung, 24 Zoll. Wählt man, unter eben den angegebenen Umständen, die Zusammensetzung aus drey Hebeln; so beträgt ihre Länge 19 oder $21\frac{1}{2}$ Zoll, nachdem man entweder die Factoren, $3 \times 1 \times 1$ und $4 \times 5 \times 5$, oder die Factoren, $2 \times 1\frac{1}{2} \times 1$ und $2 \times 10 \times 5$, bey der Einrichtung der Hebel befolgt. Wollte man aber für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte nur einen einfachen Hebel, bey dem übrigens die andern Umstände ebenfalls die jetzt angezeigten blieben, gebrauchen; so würde seine Länge 103 Zoll betragen. Hieraus erhellt, daß für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte, bey Annahme gleichförmiger Hebel und eines gleichen Längenmaßes in den Entfernungslinien, der einfache Hebel die größte Ausdehnung, der Länge nach, nehmlich 103 Zoll, haben würde. Bey den zusammengesetzten Hebeln zeigt sich diese Ausdehnung weit geringer, obwohl unter sich selbst verschieden, nehmlich nur 24, oder $21\frac{1}{2}$, oder 19 Zoll.

§. 153. Bey den bisher betrachteten zusammengesetzten Hebeln ist es nicht nothwendig, die einzelnen Hebel jedes Mahl in einerley ebenen Fläche zu denken, wie hier, zur anfänglichen Erleichterung des Vortrags, geschehen ist: sondern die letztern können auch in verschiednen Flächen liegen, die sich unter beliebigen Winkeln schneiden, wenn nur die übrigen Hauptumstände beybehalten werden. Man kann auch Zusammensetzungen aus Hebeln der zweyten Art und aus Winkelhebeln anordnen; jene am bequemsten auf verschiednen ebenen Flächen.

Erklärung.

§. 154. Der kleine Zirkel, *A*, (*Fig.* 39.) sey das Zeichen eines mathematischen Puncts. Durch einen solchen können nach allen Richtungen unzählbar viele mathematische gerade Linien gelegt werden. Man denke jetzt nur diejenigen von allen, welche auf einerley ebenen Flä-

che,

che, z. E. hier auf der Fläche des Papiers ihn durchlaufen könnten, und nehme aus den letztern die viere, welche in der Figur verzeichnet sind, vor sich, nehmlich *Aa* und *dc* und *mb* und *ne*. Die Linie, *Aa*, soll auf *ne* perpendicular stehn. Wenn nun der Punct, *A*, sich bewegt; so muß er es in irgend einer Linie thun. Er thue es in der Linie, *Aa*, und gelange bis in *a*. Die Linie, *Aa*, nun heißt sein Weg oder auch sein natürlicher Weg. Indem er aber diesen Weg durchgangen ist, hat er sich nach und nach von den übrigen drey Linien entfernt, von *dc* und *mb* und *ne*. Von der Linie, *dc*, ist er allmählig so weit abgetreten, als die Perpendiculare, *ca*, angiebt; von *mb* nach Angabe der Perpendiculare, *ba*, und von *ne* nach Angabe der Perpendiculare, *Aa*. Diese Perpendicularen sollen des Punctes, *A*, mechanische Wege genennt werden, und zwar jede einzelne sein mechanischer Weg im Bezug auf die Linie, auf welcher die Perpendiculare steht. So heißt die Perpendiculare, *ca*, des Punctes, *a*, mechanischer Weg, im Bezug auf die Linie, *dc*, u. s. w.

Man sieht hier, daß eines Punctes natürlicher Weg von seinen mechanischen Wegen an Größe verschieden, aber auch zuweilen mit einem solchen gleich groß seyn kann. Das erste ist hier der Fall, wenn man die Bewegung des Punctes auf seinem natürlichen Wege, *Aa*, auf die Linie, *dc* oder *mb*, bezieht; das letzte, wenn man bey seiner Bewegung den Bezug auf die Linie, *ne*, nimmt.

Anmerkung.

§. 155. Eine Kraft, *K*, (*Fig.* 40.) die vermittelst eines Fadens, *b*, an einem Hebel, *ac*, wirkt, muß noch eben so auf ihn wirken, wenn sie unmittelbar mit ihrem Mittelpunct der Schwere (§. 73.), das ist hier mit *c* an ihren vorigen Wirkungspunct des Hebels gebracht wird. Dieses ist mit der Kugel, *K*, bey *M* geschehen. Doch

muß

muß die Kraft auch in *M* ihre vorige Richtungslinie, *c b*, beybehalten. Die Schwerkraft, die hier zum Beyspiel gewählt ist, thut dieses für sich schon.

Für die nächste Betrachtung soll diese Vorstellungsart, zur Erleichterung des Vertrags, angewendet werden.

Lehrsatz.

§. 156. Wenn ein geradliniger Hebel, *a c b*, (*Fig.* 41.) an welchem zwey Kräfte, *a* und *b*, im Gleichgewichte sind, durch einen Druck auf einen seiner Arme in Bewegung gesetzt wird, und so lange diese Bewegung dauert, das Verhältniß der Entfernungen beyder Kräfte vom Ruhepuncte, *c*, gegen einander unverändert bleibt: so verhalten sich sowohl die natürlichen (*b d v* und *a e m*), als auch die mechanischen (*o v* und *n m*) Wege der zwey Kräfte, ingleichen ihre Geschwindigkeiten, gegen einander, wie die Kräfte selbst, umgekehrt.

Beweis.

Es sey ein geradliniger Hebel, *a c b* (*Fig.* 41.) in horizontaler Lage. An ihm wirken zwey Schwerkräfte in den Kugeln, *b* und *a*, welche mit den Mittelpuncten ihrer Schwere, *b* und *a*, in den Grenzpuncten der Hebelarme, *c b* und *c a*, unmittelbar angebracht sind (§. 155.). Die Richtungslinien sind vertical, machen also mit den Hebelarmen rechte Winkel, und die Arme sind selbst die Entfernungen der Kräfte vom Ruhepuncte. An diesem Hebel sey das Gleichgewicht, und demnach ist $b : = ca : cb$. Etwa durch einen Druck von oben auf den Arm, *c b*, komme der Hebel in Bewegung, und gewinne, nach wieder aufgehobenem Drucke, die Lage, *m c v*. Die Entfernungen, *c o* und *c n*, haben jetzt noch das Verhältniß unter sich, das sie vorhin als die Linien, *c b* und *c a*, hatten (§. 122.), und das Gleichgewicht besteht von neuem. Die natürlichen Wege (§. 154.) der beyden Kräfte sind die Zirkelbogen, *b d v* und *a e m*. Diese Bogen sind in Rücksicht

sicht ihrer Grade gleich; denn sie sind die Maße der Verticalwinkel, y und x. (G. §. 335.) Als Linien betrachtet aber ist ihre Größe verschieden, und da verhalten sie sich als gleichgroße Theile von ungleichgroßen Zirkeln, wie die Radien dieser Zirkel, (G. §. 439.) das ist, wie cb zu ca. Es ist demnach,

$bdv : aem = cb : ca$. Aber vorhin war,

$b : a = ca : cb$

oder, $cb : ca = a : b$

Daher ist $bdv : aem = a : b$

Dieses heißt: der natürliche Weg der einen Kraft, b, verhält sich zum natürlichen Wege der andern Kraft, a, wie die andere Kraft, a, zur ersten Kraft, b. Was nun die Geschwindigkeiten beyder Kräfte in den Kugeln, b und a, betrifft; so verhalten sie sich gegen einander, wie die Länge der Bogen, bdv und aem, welche sie in gleicher Zeit durchgehen (§. 16.); also verhalten auch sie sich wie die Kräfte umgekehrt.

Endlich verhalten sich gegen einander eben so die mechanischen Wege (§. 154.) ov und nm, der beyden Kräfte, b und a. Denn die Triangel, cov und cnm, sind wegen der rechten Winkel bey o und n und wegen der gleichen Verticalwinkel, y und x, einander ähnlich (G. §. 461.); und daher ist: (G. §. 460.)

$ov : cv = nm : cm$

oder $ov : nm = cv : cm$

aber $cv = cb$, als Radien eines Zirkels,

und $cm = ca$, aus gleichem Grunde.

Daher ist, $ov : nm = cb : ca$

Es war aber vorhin, $cb : ca = a : b$

Demnach ist, $ov : nm = a : b$

Das heißt: auch die mechanischen Wege der Kräfte verhalten sich wie die Kräfte selbst umgekehrt.

Zusätze.

§. 157. Will man aber auch am Hebel, acb, (*Fig.* 31.) die Schwerkräfte der Gewichte, L und K, an Fäden auf die Puncte, a und b, des Hebels wirkend fortdenken,

und sie nicht, wie vorhin, mit ihrer Schwere Mittelpuncten an die Grenzpuncte, a und b, versetzt sich vorstellen; so bleibt der Lehrsatz des vorigen Paragraphen doch auch also noch anwendbar und richtig. Denn wenn der Hebel, ab, in die Lage, fg, aus der ersten, ab, etwa durch einen Druck, gebracht wird; so bewegen sich die Mittelpuncte der Schwere beyder Gewichte, L und K, auch in Bogen, und bezeichnen durch sie ihre natürlichen Wege. Der mechanische Weg aber eines jeden Gewichts ist eine Perpendiculare, die man bey der zweyten Lage des Hebels in fg aus dem Mittelpuncte der Schwere des bewegten Gewichts auf die gerade Linie fällt, welche, bey der ersten Hebellage, ab, durch seiner Schwere Mittelpunct, unter rechten Winkeln auf seine Richtungslinie gelegt wird, u. s. w. Kurz der ganze Lehrsatz bleibt auch bey einer solchen Vorstellung anwendbar und gültig.

§. 158. Er bleibt dieses auch, wenn man ihn auf die Bewegung der beyden Wirkungspuncte, a und b, (*Fig.* 12.) der Kräfte, L und K, am Hebel, acb, anwendet. Denn wenn der Hebel, unter den Bedingungen in (§. 156.) bewegt wird, verhält es sich mit den natürlichen und mechanischen Wegen, wie auch mit den Geschwindigkeiten dieser Puncte, wie mit allen diesen Umständen bey den bewegten Kräften, L und K, selbst.

§. 159. Der Lehrsatz in (§. 156.) ist zwar in dem ihm zugegebenen Beweise nur auf den Hebel der ersten Art angewendet worden; er läßt sich aber, auf eben dem dort angegebenen Wege, auch vom Hebel der zweyten Art, vom Winkelhebel und von jedem Hebel an dem die Kräfte unter schiefen Winkeln wirken, als richtig erweisen. Um nicht die Kupfer unnöthig zu vervielfältigen, wird dieses zu untersuchen dem eignen Fleiße eines jeden, der sich dieses Buchs bedient, überlassen.

§. 160. Die Bedingung in dem Lehrsatze (§. 156.), daß zwischen den Entfernungen der Kräfte, wenn der Hebel sich bewegt, das anfängliche Verhältniß bleiben

soll

soll, ist im Exempel, das für den Beweis gewählt ward, zwar erfüllt; doch aber so, daß, bey dem bleibenden Verhältnisse, die Entfernungen beyderseits für sich kleiner wurden. Dieselbe Bedingung nun kann in andern Fällen auch so erfüllt werden, daß die Entfernungen nicht nur einerley Verhältniß behalten, sondern daß auch die Glieder desselben an Größe unverändert bleiben. Denn man lasse auf den Hebel, *a c b*, (*Fig.* 41.) in *a* und *b* nicht die Schwerkräfte der dort angebrachten Kugeln, sondern Kräfte von Menschenhänden wirken, die sich Anfangs das Gleichgewicht halten, dann aber durch die Uebermacht der einen bey *b* in Bewegung gesetzt werden, bis der Hebel in die Lage, *m v*, gebracht ist. Man setze, daß beyde Hände vom Anfange bis zum Ende der Bewegung unveränderlich auf die Arme des Hebels unter rechten Winkeln wirken; so sind die Arme selbst als die Entfernungen beyder Kräfte anzusehen, und der letztern Verhältniß bleibt demnach in diesem Falle bey der Bewegung nicht nur unverändert, sondern die Glieder desselben behalten auch beyderseits ihre erste Größe. Dem geführten Beweise (§. 156.) gemäß verhalten sich aber die natürlichen und mechanischen Wege der Kräfte, ingleichen ihre Geschwindigkeiten gegen einander, wie die Kräfte selbst umgekehrt.

Aufgabe.

§. 161. Einen mathematischen geradlinigen Hebel der ersten Art so einzurichten, daß er, so lange an ihm zwey Kräfte im Gleichgewichte einander entgegen wirken, nur in der horizontalen Lage ruhig bleiben kann.

Auflösung.

Daß dieses der angezeigte Hebel nicht etwa schon für sich vermag, ist daher offenbar, weil von ihm erwiesen worden ist (§. 122.), daß er bey dem Gleichgewicht der Kräfte nicht nur in der horizontalen, sondern auch in jeder schrägen Lage ruhig verbleibt. Soll er nun aber allein in der

erstern ruhen können; so wird noch eine besondre Einrichtung hinzukommen müssen. Eine solche ist nun die folgende.

Am Hebel, *acb*, (*Fig.* 42.), dessen Widerlage bey *c* hier eine mathematische Zapfenlinie (§. 89.) seyn soll, sey im Ruhepuncte, *c*, abwärts eine mathematische, und zwar unbiegsame Linie, *cn*, perpendicular und so fest angesetzt, daß sie sich zugleich mit dem Hebel um *c* wendet. An ihr befestige man unten ein Gewicht, *M*, dessen Mittelpunct der Schwere in ihrer Fortsetzung liegt. So lange nun zwey Kräfte, *L* und *K*, an der für sich betrachteten Hebellinie, *acb*, ohne dabey Rücksicht auf das Gewicht, *M*, zu nehmen, mit einander im Gleichgewichte sind, so lange wird der ganze Hebel, zugleich mit dem an ihm befestigten Gewichte, *M*, nur in der horizontalen Lage, *ab*, ruhen können. Wofern ihn aber etwa ein Druck auf *b* aus derselben in eine schräge, *de*, brächte; so wird er sogleich, wenn der Druck wieder gewichen ist, sich in jene horizontale Lage zurück bewegen.

Beweis.

Die Hebellinie, *acb*, (*Fig.* 42) welche in *c* durch die in der Auflösung angegebene Widerlage gehalten wird, ruhe, ehe noch irgend ein Gewicht an ihr wirkt, in horizontaler Lage, *ab*. In den Puncten, *a* und *b*, bringe man an biegsamen mathematischen Linien die Kräfte, *L* und *K*, an, und zwar so, daß $L : K = cb : ca$; so findet das Gleichgewicht zwischen ihnen Statt, und die Hebellinie, *acb*, bleibt unverrückt horizontal. Wenn nun ferner im Ruhepuncte, *c*, das Gewicht, *M*, vermittelst der mathematischen, unbiegsamen Linie, *cn*, am Hebel so befestigt wird, wie es die Auflösung vorschrieb; so bilden sich zwey Winkelhebel, *can* und *cnb*. An keinem von beyden kann das Gewicht, *M*, ein Moment (§. 123.) haben, weil seine Richtungslinie, *cn*, in beyden durch den Ruhepunct, *c*, geht und das Moment also Null mahl *M*, das ist, nichts beträgt. An *a*

und

und *b* bleiben demnach die Kräfte, *L* und *K*, im vorigen Gleichgewicht, das Gewicht, *M*, verstärkt nur den Druck auf die Widerlage in *c*, und der Hebel selbst behält noch seinen ruhigen Stand in der Horizontale, *a b*.

Man setze aber nun, daß durch einen Druck, etwa auf den Arm, *c b*, der Hebel aus der horizontalen Lage, *a b*, in eine schräge, *d e*, gebracht werde; so wird sogleich das Gewicht, *M*, das vermittelst seiner unbiegsamen Linie, *c n*, sich mit dem Hebel zugleich von *n* nach *o* bewegen muß, in einem Bogen etwas aufwärts steigen, und es wird an den beyden Winkelhebeln, *c d o* und *c e o*, ein Moment bekommen. Denn seine Richtungslinie, *f g*, ist aus dem Ruhepuncte, *c*, in den Punct, *v*, verrückt; die Linie, *c v*, ist nun ihre Entfernung, und das Product aus der Größe dieser Linie in das Gewicht, *M*, ist dieses Gewichtes Moment. Sobald nun der vorhin gesetzte Druck, der den Arm, *c b*, bis in die Lage, *c e*, begleitet hat, wieder weicht; so hat weder die Kraft, *L*, noch die Kraft, *K*, dem Moment von *M* etwas entgegen zu setzen, denn beyde wenden ihre Momente schon ganz auf, einander das Gleichgewicht, auch bey dieser schrägen Lage des Hebels, *d e*, zu halten. (§. 122.) Das Gewicht, *M*, mit seiner unbiegsamen Linie, *c o*, und zugleich mit dem an ihr befestigten Hebel, *d e*, wird um *c* sich wenden, bis sein Moment wieder Null wird. Dieses geschieht, wenn es mit seiner Linie, *c o*, wieder in die Lage, *c n*, kommt. Dann ist aber auch der Hebel, *d e*, in seine erste horizontale Lage, *a b*, zurück gekehrt. Folglich kann der auf die beschriebene Art eingerichtete Hebel, wenn zwey Kräfte, *L* und *K*, an ihm im Gleichgewichte sind, nur in der horizontalen Lage ruhig verbleiben.

Zusätze.

§. 162. Der so eingerichtete Hebel, *a c b*, (*Fig.* 42.) wird folglich schon durch seine horizontale Lage das Gleichgewicht der Kräfte, *L* und *K*, an ihm zu erkennen geben.

§. 163.

§. 163. Man füge der Kraft, *K*, (*Fig.* 42.) die sich mit *L* bey der horizontalen Lage des Hebels, *acb*, im Gleichgewicht befindet, ein Zusatzgewicht, das *p* heißen mag, bey; so wird *K* mit *p* vereint, vermöge des Moments, welches *p* sogleich annimmt, sich niederwärts bewegen müssen. Denn diesem Momente von *p* kann *L*, welches sein Vermögen schon auf das Gleichgewicht mit *K* verwendet, nichts entgegen setzen. Das Mittelgewicht, *M*, setzt ihm auch nichts entgegen, weil es jetzt zum Moment Null hat. Sobald nun aber *K* mit dem Zusatzgewichte, *p*, zu sinken anfängt, und *M* dadurch an seiner unbiegsamen Linie, *co*, gehoben wird; so erlangt *M* ein Moment, und zwar immer ein größeres, je höher es gehoben wird; indem seine Entfernungslinie, *cv*, dabey allmählig zunimmt, bis sie endlich in die horizontale Lage kommt, wo sie das größte Moment für das Gewicht, *M*, möglich macht und den Hebel in verticale Richtung versetzt. Das Zusatzgewicht, *p*, bey *K* hingegen verringert sein erstes Moment im Niedersteigen stets, weil dabey seine Entfernung vom Ruhepuncte, *c*, nach und nach abnimmt und endlich Null wird, wenn *K* so tief gesunken ist, daß es in die Verticallinie vom Ruhepuncte, *c*, kommt. Dann wird also das Moment vom Zusatzgewichte, *p*, auch Null, und der Hebel befindet sich in verticaler Lage. Muß nun das Moment des Gewichtes, *M*, von Null an so lange immer wachsen, bis der Hebel in verticaler Lage sich befindet; und muß dagegen bis eben dahin das Moment des Zusatzgewichtes, *p*, bey *K* immer von seiner ersten, bestimmten, endlichen Größe bis zu Null abnehmen: so kann der Hebel, vermöge des Zusatzgewichtes, *p*, zwar nicht in horizontaler Lage bleiben, aber eben so wenig in eine verticale versetzt werden. Er muß folglich in irgend einer schrägen Lage zur Ruhe kommen, die, bey einem und demselben Hebel, um so weniger schräg seyn wird, je geringer das Zusatzgewicht, *p*, war, und im Gegentheil um so mehr, je größer jenes war. Uebrigens beurtheilt man die kleinere oder größere Schrägheit der Lage einer geraden Linie, *dce*,

in

in Rücksicht einer andern, *a c b*, welche hier die horizontale ist, nach der Größe des spitzigen Winkels, *b c e*, welchen jene mit dieser macht.

§. 164. Es folgt hiermit, daß bey einem und demselben Hebel, der nach Angabe der Auflösung in (§. 161.) eingerichtet ist, die schräge Lage desselben nicht nur anzeigt, daß die Kräfte an ihm nicht im Gleichgewichte sind, und welche von beyden das Uebergewicht hat; sondern daß er auch durch die geringere oder stärkere Schrägheit seiner Lage zu erkennen giebt, ob das Zusatzgewicht bey der einen Kraft, *K*, (*Fig.* 42.), welches vorhin *p* genennt ward, das eine Mahl schwächer, ein ander Mahl aber stärker gewählt ist.

§. 165. Am Hebel, *a c b*, (*Fig.* 42.) sollen die Kräfte, *L* und *K*, sich das Gleichgewicht halten; die Kraft, *K*, aber soll nun ein Zusatzgewicht, das in der Figur nur zu denken, nicht aber zu sehn ist und bisher *p* geheißen hat, erhalten, vermöge welches der Hebel in die schräge Lage, *d c e*, gebracht wird und in derselben, durch Beyhülfe seines schon mehrmahls angezeigten Mittelgewichts, *M*, ruhig verbleibt. Wenn dieses ist, so verhält sich die Entfernung, *c h*, der Kraft, *K*, die das Zusatzgewicht, *p*, bekommen hat, zur Entfernung, *c v*, des erhobenen Mittelgewichts, *M*, in der Lage, *c o*, wie das Mittelgewicht, *M*, zu dem Zusatzgewichte, *p*. Dieses wird, aus Betrachtung des besondern Winkelhebels, *c o e*, sogleich klar seyn. Demnach kann die Größe von *p*, sobald *c h* und *c v*, wie auch *M* bekannt sind, jederzeit gefunden werden.

§. 166. Wenn die Arme, *c a* und *c b*, des Hebels, *a c b*, (*Fig.* 42.) der Länge nach bestimmt sind, und wenn der Winkel, *b c e*, bestimmt ist, nach welchem der Hebel in die schräge Lage, *d c e*, sich begeben und in ihr verharren soll: so wird das Zusatzgewicht, *p*, bey *K* immer kleiner genommen werden können; je kleiner entweder das Mittelgewicht, *M*, ist, oder je kürzer die unbiegsame Linie, *c n*, die es trägt, gewählt wird, oder auch je kleiner diese beyden Stücke zugleich sind, weil in jedem der drey Fälle das

Moment

Moment von *M* sich für jede schräge Hebellage mit verringert.

§. 167. Was in Rücksicht des Zusatzgewichtes, *p*, in Verbindung mit der Kraft, *K*, (*Fig.* 42.) sich als wahr ergab, läßt sich leicht auch auf den Fall seiner Verbindung mit der andern Kraft, *L*, am Hebel, *acb*, anwenden.

Erklärung.

§. 168. Ein Hebel, welcher aus irgend einer Materie, es sey aus Holz, Metall, u. s. w. zubereitet wird, heißt ein physischer Hebel, zur Unterscheidung vom mathematischen, der bisher betrachtet worden ist. Bey dem Gebrauche des physischen Hebels geschieht es oft, daß man von den an ihm wirkenden Kräften die eine als Mittel gebraucht, die andre in Ruhe zu erhalten oder zu bewegen oder auszumessen. Dann pflegt die erstre eine Kraft im engern Verstande, die andre aber eine Last genennt zu werden.

Anmerkung.

§. 169. An der Kaufmannswage, welche, wie sich bald zeigen wird, unter die physischen Hebel gehört, wirken, bey ihrem Gebrauche, zwey Kräfte gegen einander, nehmlich das metallne Gewicht und die eingelegte, zu verkaufende, Waare. Das Gewicht ist das Mittel, wodurch man untersuchen will, ob die Waare mit ihm das Gleichgewicht hält oder nicht, und welches Maß ihr in Pfunden, Lothen und Quentchen zukommt. Das metallne Gewicht ist also hier die Kraft im engen Verstande, die Waare hingegen die Last.

Zusätze.

§. 170. Der physische Hebel hat mit dem mathematischen vieles gemein, als: Ausdehnung, Figur, Arme, Ruhepunct, Richtungslinien der Kräfte und ihre Entfernungen, ingleichen Ruhe und Bewegung. Daher ist

nicht

nicht zu zweifeln, daß die Sätze, welche in Rücksicht dieser Umstände am mathematischen Hebel erwiesen worden sind, auch auf den physischen anwendbar seyn werden. Allein eben so klar ist es, daß dabey auch diejenigen Umstände in Erwägung zu ziehen sind, in welchen der letztere vom erstern unterschieden ist, und welche von den Eigenschaften der Materie abhangen, aus welcher er besteht. Die mathematischen Hebel selbst sowohl, als auch die Fäden, welche die gegen einander wirkenden Kräfte mit ihnen verbanden, waren mathematische Linien; die ersten unbiegsam, die zweyten durchaus biegsam. Beyde wurden demnach ohne Schwere gedacht, beyde ohne die Gefahr zu brechen oder zu reißen. Bey der Drehung des Ruhepuncts an der Widerlage oder an den Zapfenlinien war keine Reibung (oder Friction), welche die Bewegung hätte erschweren können; und eben so wenig entstand eine solche Friction an den Linien, um welche sich die Rollen, die oft beym Gebrauch des Hebels hinzukamen, bewegen mußten. Die mathematische Fadenlinie war von aller Starrheit frey; sie legte sich willig um den Bogen der Rolle, und aus ihm wieder in verticale Richtung. Alles dieses ist weit anders, wenn der Hebel aus Holz oder Metall bereitet und zum Gebrauch angewendet wird. Nun wird er selbst, nachdem stärkre oder schwächre Kräfte an ihm wirken sollen, eine denselben angemeßne Festigkeit und also auch Schwere haben müssen, damit er weder bricht noch sich beugt. Wenn dann der eine Arm von ihm, bey gleicher Stärke mit dem andern, gleichwohl länger ist als jener; so wird er für sich schon ein Uebergewicht über denselben erhalten. Die Schnuren oder Stricke, vermittelst welcher an ihm Kräfte wirken sollen, werden nicht nur schwer seyn, sondern über dieses, wegen ihrer Starrheit, nicht ohne Widerstand gegen die bewegende Kraft, sich um die oft anzubringenden Rollen mit Schwierigkeit beugen lassen. An den Zapfen des Hebels sowohl als der Rollen wird eine Friction entstehn, deren Ueberwin-

windung einen besondern Aufwand von Kraft erfordert. Diese und noch andre Umstände werden gewiß Einfluß theils auf das Gleichgewicht, theils auf die Bewegung der Kräfte am physischen Hebel haben; und man kann voraus wahrnehmen, daß, wenn auf ihn die Gesetze des mathematischen angewendet werden sollen, auf jene ihm eignen Umstände Rücksicht genommen werden muß.

§. 171. Es ist zwar, wenigstens bis auf unsre Zeiten, nicht möglich, bey jedem physischen Hebel mit mathematischer Schärfe zu bestimmen, wie viel durch solche Umstände, die bey ihm der Materie wegen hinzukommen, in den Regeln abgeändert wird, die man vom mathematischen Hebel auf ihn anwendet: aber durch Erfahrungen und Schlüsse aus denselben ist man doch dahin gelangt, daß diese Bestimmungen so genau gemacht werden können, als es für den Gebrauch in den Künsten des bürgerlichen Lebens, der jedesmahligen Absicht gemäß, zureicht. So verhält es sich besonders mit der Friction und der Starrheit bey Anwendung von Schnuren und Seilen. Ueber beydes ist hier etwas zu bemerken.

Erklärung.

§. 172. Alle physischen, festen Körper haben rauhe Außenflächen, das ist, an ihnen treten viele der kleinen Theile, aus welchen die Körper zusammengesetzt sind, über die ihnen zunächst liegenden etwas heraus. Bey manchen Körpern bemerkt dieses schon das bloße Auge, wie bey dem Bimssteine; bey andern entdecken es die Vergrößerungsgläser, wie bey dem abgeglätteten Stahle. Wenn nun ein Körper unmittelbar über den andern hin bewegt wird, es sey nun, daß man ihn ziehe, drucke oder auch nur rolle; so greifen die hervorspringenden Theile an der Außenfläche des einen in die Vertiefungen zwischen dergleichen Theilen an der Außenfläche des andern ein, erschweren hiermit die Bewegung und verursachen, wie man sich darüber auszudrücken pflegt, eine Friction.

Zusätze.

Zusätze.

§. 173. Die Friction bey der Bewegung zu überwinden erfordert offenbar einen fortwährenden Aufwand von Kraft. Damit nun dieser, wo man die Kraft sparen will, so geringe als möglich werde, so ist zu untersuchen, ob und wie die Stärke der Friction gemindert werden könne. Und wenn es sich dann zeigt, daß dieselbe nicht ganz zu heben ist; so muß man doch den von ihr bleibenden Rest zu messen suchen, um ihn bey Berechnung des Hebels mit in Betrachtung ziehen zu können.

§. 174. Zur Verminderung der Friction hat man aus Erfahrungen verschiedne nützliche Regeln gefunden. Folgende Sätze geben davon einige Proben.

Erfahrung.

§. 175. Durch Abglättung oder Politur derjenigen Außenflächen zweyer Körper, welche sich an einander hin bewegen sollen, wird die Friction ordentlicher Weise vermindert.

Zusätze.

§. 176. Daher folgt die Regel, daß die sich berührenden Flächen zweyer Körper, wenn einer von ihnen an dem andern hinbewegt werden soll, abgeglättet oder polirt werden müssen.

§. 177. Doch lehrt auch die Erfahrung, daß man nicht schließen dürfe: je genauer die Politur ausgeführt sey, um so mehr werde die Bewegung erleichtert. Denn bey sehr feiner Politur findet man oft die Bewegung wieder erschwert. Eine Glastafel z. E. kann über einer andern allerdings bey geringern Widerstande der Friction hinbeweget werden, wenn beyde an den Außenflächen etwas glatt, als wenn sie an denselben fühlbar rauh sind. Ist aber das Glas sehr fein polirt, so geschieht es, daß die Bewegung eines Stücks über dem andern wieder erschweret wird, und zwar weit mehr als bey den rauhesten Glastafeln.

Anmer-

Anmerkung.

§. 178. Wenn man auf der Fläche eines wohlpolirten Spiegels ein klein Stück ebenfalls wohlpolirtes Spiegelglas nur mit einem schwachen Drucke umherführt; so wird man bald, wo sich auf dem erstern eine sehr glatte Stelle findet, das letztre so fest an jenem sich anhangend wahrnehmen, daß, wenn man es weiter schieben will, ein Druck von mehrern Lothen nöthig ist, es von der Stelle zu bringen. Man pflegt den hier eintretenden Umstand, der die Bewegung so sehr erschwert, Adhäsion, Cohäsion oder Attraction zu nennen; aber worauf es bey ihm ankommt, läßt sich nicht sicher erklären. Hier ist es genug, ihn angedeutet zu haben, damit man nicht etwa die Friction immer mehr zu vermindern hoffe, jemehr die Außenflächen der sich reibenden Körper polirt sind.

Erfahrung.

§. 179. Oehl, Seife, Unschlitt und andre Fettigkeiten, wenn sie zwischen abgeglättete Körperflächen, die an einander hin bewegt werden sollen, gebracht werden, pflegen die Friction zu erleichtern. Zwischen Holzflächen z. E. thun es Fettigkeiten von Thieren, zwischen Metallen aber Oehle.

Zusatz.

§. 180. Doch bey sehr feiner Politur der Flächen erleichtern Fettigkeiten nicht in jedem Falle die Bewegung. Denn vermittelst derselben findet die Adhäsion (§. 178.) oft noch eher Statt. Wenigstens wird diese durch jene nicht verhindert.

Anmerkung.

§. 181. So ist es, wenn eins der Glasstücken, von welchen in (§. 178.) gesprochen ward, mit warmen Unschlitt nur fein bestrichen wird. Ein gleiches hat man bey zwey polirten Marmorstücken erfahren.

Erfah-

Erfahrung.

§. 182. Körper von Materie gleicher Art zeigen, unter sonst gleichen Umständen, eine stärkere Friction, als Körper von ungleicher Art.

Anmerkung.

§. 183. Stahl auf Stahl z. E. leidet eine stärkre Friction, als Stahl auf Kupfer. Und die Friction von Stahl auf Kupfer ist wieder stärker, als von Stahl auf Messing.

Zusatz.

§. 184. Es ist demnach für die Leichtigkeit der Bewegung vorzüglich vortheilhaft, wenn stählerne Zapfen am Hebel in messingnen Lagern sich wenden können.

Erfahrungen.

§. 185. Die Friction ist bey Körpern, die mit ebenen Außenflächen sich berühren, und an einander hin bewegt werden sollen, unter sonst gleichen Umständen, beträchtlich stärker, als bey solchen, die mit horizontal liegenden Zapfen versehen sind, welche in Pfannen umlaufen.

§. 186. Die Stärke der Friction richtet sich in ihrem Wachsthume vornehmlich nach der Stärke des Drucks, welchen die sich berührenden Flächen gegen einander leiden. Doch hat auch ihre geringre oder größre Ausdehnung dabey einigen Einfluß. Bey größern sich berührenden Flächen nehmlich wird, wenigstens bey manchen Arten der Körper, eine stärkre Friction bemerkt, als wenn dieselben Flächen kleiner sind.

§. 187. Die zunehmende Geschwindigkeit der Bewegung vermehrt die Friction.

Zusätze.

§. 188. Es folgt, vermöge (§. 173.) die Frage: Wenn nun nach den bisher gegebenen und klüglich angewandten

Regeln

Regeln, die Friction zwar gemindert, aber doch nicht ganz aufgehoben wird; wie soll der bleibende Rest von ihr, bey diesem oder jenem angegebenen Werkzeuge und bey der Wirkung von Kräften an ihm, deren Größe bestimmt ist, im voraus berechnet werden? Allein, wie die Mathematiker und Physiker schon in den vorhin beygebrachten Regeln nicht ganz übereinstimmen; so gehn sie auch in Beantwortung der gegenwärtigen Frage von einander ab. Denn bey den Versuchen, welche zu Bestimmung der Frictionsstärke angestellt worden sind, und noch angestellt werden, finden sich sehr viele Schwierigkeiten, die theils bis jetzt noch nicht zu heben sind, theils auch künftig, höchst wahrscheinlich, sich nie heben lassen. Bey der Friction nehmlich kommt es außer der Stärke des Andrucks und der Größe der sich reibenden Flächen gewiß auch auf die Art des Zusammenhanges aller in ihnen liegenden kleinen Theile an (§. 183.), und auf den Grad der Abglättung. Aber jener Zusammenhang der kleinen Theile ist bey zwey Versuchen, die zu verschiednen Zeiten, an verschiednen Orten, von verschiednen Personen angestellt werden, wenn sie auch solche Körper, die überhaupt von gleicher Art sind, dazu wählen, höchstselten oder vielleicht niemahls völlig einerley. Man nehme zum Beyspiel das Eichenholz. Selbst an verschiednen Stellen eines und desselben Baumes ist es nicht gleich dicht, auch übrigens nicht von ganz gleicher Art der Zusammensetzung in den kleinen Theilen. Diese Verschiedenheit findet sich noch stärker bey Vergleichung des Holzes von mehrern jüngern und ältern Eichen eines ganzen Waldes, oder gar aus verschiednen Ländern. Auf den Grad seiner Trockenheit kommt es bey der Friction auch an; wer kann aber diese nach einem sichern Maßstabe jedes Mahl bestimmen? da sie zumahl mit der Veränderlichkeit der Atmosphäre selbst veränderlich ist. So läßt sich auch der Grad der Abglättung nicht genau anzeigen, der dem Holze bey dem einen Versuche gegeben war, um bey einem andern den gleichen Grad ihm zu ertheilen. Solche oder auch

andre

andre Schwierigkeiten kommen bey allen Körpern vor, deren Friction untersucht worden ist. Daher wird es klar, warum die bisher angestellten Versuche noch keine so bestimmten Regeln liefern, daß die Stärke der Friction bey einer Maschine, deren Materialien, Einrichtungen und Kräfte angegeben werden, im voraus genau sich berechnen läßt. Es nehmen daher vorsichtige, theoretischpractische Mechaniker aus den gemachten Versuchen dasjenige als Regel zusammen, was bey Anlegung von Maschinenwerken, in Rücksicht der Friction, einigermaßen zutrifft. Völlige Uebereinstimmung der Scribenten über diese Materie kann freylich bey solchen Annahmen nicht erwartet werden. Eine derselben stehe hier zur Probe, welche ein gelehrter Mann unsrer Zeit in folgenden bescheidnen Ausdrücken äußert: „In der Ausübung hat man bey Maschinen alle Mahl mit glatten Flächen zu thun, weil sich solche bey ihrem Gange gar bald von selbst abschleifen. Man kommt über dieses mit Fett, Oehl, Seife und dergleichen zu Hülfe. Ich bin unter dieser Voraussetzung der Wahrheit immer nahe genug gekommen, wenn ich, bey fortrutschender Bewegung,

I. bey Holz auf Holz
— — — Eisen
— Eisen auf Eisen
} die Reibung = $\frac{1}{4}$ des Drucks

— Eisen auf Messing die Reibung = $\frac{1}{6}$ des Drucks

angenommen habe.

II. Bey umlaufenden horizontalliegenden Zapfen aber beträgt die Reibung nur etwa halb so viel, das ist, $\frac{1}{8}$ oder $\frac{1}{12}$ des Drucks.

III. Bey in einander greifendem Räderwerk ist die Reibung an den Zähnen, Kämmen und Triebstöcken noch geringer, und beyläufig nur $\frac{1}{4}$ so groß als No. I.“ *)

§. 189.

*) Neuer Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften. Mit nöthigen Veränderungen und Zusätzen, von Joh. Tob. Mayer und Carl Christian Langsdorf. Marburg, 1797. Seite 369.

§. 189. Was die Starrheit der Stricke betrifft, welche im (§. 170.) auch als etwas angegeben ward, das die Bewegung des physischen Hebels erschwert, wenn er, beym Gebrauche, mit Rollen in Verbindung gesetzt wird: so ist darüber etwa folgendes zu bemerken. Neue Stricke widersetzen sich, in Rücksicht auf ihre Starrheit, der Bewegung mehr, als solche, welche bereits einige Zeit schon gebraucht worden sind; und eben so, stärkre mehr als schwächre. Stricke überhaupt erschweren mehr die Bewegung, wenn sie über kleinre Rollen laufen müssen, als wenn sie über größre gelegt sind; mehr, wenn die Rollen eine schnellere, als wenn sie eine langsamere Bewegung haben. Eine genaue Rechnung hierüber bey einer angegebenen Maschine im voraus zu führen, ist nicht möglich. Alles kommt auf ungefähre Schätzungen an.

Aufgabe.

§. 190. Wenn bey einem physischen, geradlinigen Hebel der ersten Art in horizontaler Lage, an welchem Last und Kraft als Schwerkräfte frey wirken sollen, folgende Stücke bestimmt sind, als: 1) seine Schwere, 2) seine Länge, 3) die Lage seines Mittelpuncts der Schwere, 4) die Lage seines Ruhepuncts, und 5) die Last; so ist die Frage: wie, dem allen gemäß, die Kraft gefunden werden kann, welche mit der Last das Gleichgewicht hält?

Auflösung mit Beweis.

Es sey *ab*, (*Fig.* 43.) so ein Hebel, wie er jetzt angegeben ward. Seine Schwere sey 6 Pfund, seine Länge 12 Zoll. Sein Mittelpunct der Schwere liege unter *d* in der punctirten Linie, *ab*, welche man sich aber nicht an der Außenfläche des Hebels, sondern innerhalb seiner Masse gezogen denke. Es liegt also hier dieser Punct 6 Zoll weit von jedem Hebelende, *a* und *b*. In eben dieser punctirten Linie, *ab*, sey unter *c* der Ruhepunct von *a* einen Zoll entfernt, von *b* aber 11 Zoll. Er soll zur Widerlage

die

die cylindrischen Zapfen, fg, haben, welche auf beyden Seiten in Pfannen ruhen mögen. Demnach wird die Linie, cd, 5 Zoll betragen. Im Grenzpuncte, a, der punctirten Linie, ab, sey die Last, L, aufgehangen, und betrage 52 Pfund; im andern Grenzpuncte, b, soll die Kraft, K, aufgehangen werden, welche mit L das Gleichgewicht hält. Diese Kraft, K, als noch unbekannt, ist zu suchen. Sie wird nun auf folgende Art gefunden. Man denke noch nicht an die Last, L, sondern verwandle gleichsam zuvor den physischen Hebel in einen mathematischen, indem man im Mittelpuncte der Schwere bey d, der mit 6 Pfund Kraft vertical niederwärts strebt, ein Gewicht, H, von 6 Pfund an einer mathematischen Fadenlinie angehangen denkt. Nun hat man nur die punctirte Mittellinie, ab, des physischen Hebels noch vor sich, die als mathematischer Hebel bey c den Ruhepunct hat und bey d mit 6 Pfund vertical niederstrebt. Man suche nun, wie viel in a angehangen werden müßte, wenn dieser mathematische Hebel im Puncte, c, ruhen sollte und nenne das unbekannte Gewicht für a indessen y. Es wird aber nach vorigen Sätzen sich verhalten $ca : cd = 6$ Pf. : y Pf. (§. 117), oder 1 Zoll : 5 Zoll $= 6$ Pf. : y Pf.

daher $y = \frac{5 \times 6}{1} = 5 \times 6 = 30$ Pfund. Weil nun, wenn man das Gewicht, H, wieder verschwinden läßt, doch im Mittelpuncte der Schwere bey d derselbe Niederdruck bleibt; so erhellt, daß am physischen Hebel, ab, wenn er selbst nur horizontal erhalten werden soll, im Puncte, a, 30 Pfund angehangen werden muß. Nun soll aber in a eine Last von 52 Pfund getragen werden, das ist, von $30 + 22$ Pfund. Man suche demnach, wie viel für die in a hinzukommenden 22 Pfund am Puncte, b, anzuhangen ist, wenn das Gleichgewicht Statt finden soll: so wird man die Kraft, K, finden. Der Schluß ist:

11 Zoll : 1 Zoll $= 22$ Pfund : K Pfund.

Also ist $K = \frac{1 \times 22}{11} = \frac{22}{11} = 2$ Pfund.

Zusätze.

§. 191. Wenn noch genauer verfahren werden soll, so muß das Gewicht der einen Anhangungsschnure für die Last sowohl, als auch der andern für die Kraft mit in Rechnung gebracht werden. Es darf nehmlich nur das Gewicht der ersten zur gegebenen Last sogleich addirt, und dann, nach geschehener Berechnung der Kraft, von derselben das Gewicht der zweyten, ihr selbst zugehörigen Schnure subtrahirt werden. Soll Bewegung der Last entstehen, so muß die Kraft irgend eine Zulage bekommen, welche so beträchtlich ist, daß sie die Friction der Zapfen in den Pfannen, bey *f* und *g*, (*Fig.* 43.) überwinden kann. Dieses ungefähr zu treffen würde man auf (§. 188.) zurück zu sehn haben. Doch in diesen Anfangsgründen läßt sich die Frictionsrechnung nicht für jeden besondern Fall beybringen.

§. 192. Die Lösung der Aufgabe in (§. 190.) zeiget, daß die dem physischen Hebel eigne Schwere in gewissen Fällen der Kraft zu Statten kommen könne. Denn vermöge dieser Schwere konnte er von der gegebenen Last bereits 30 Pfund tragen, ehe noch eine fremde Kraft sich mit ihm vereinigte.

§. 193. Wenn an dem Hebel in (§. 190.) die Kraft, *K*, (*Fig.* 43.) gegeben worden wär, und es hätte für das Gleichgewicht mit ihr die Last, *L*, gesucht werden sollen; so würde dieses ebenfalls auf dem dort angezeigten Wege haben geschehen können. Denn man setze: für die Kraft, *K*, sey 2 Pfund gegeben, alle übrigen Umstände sollen wie dort bestimmt seyn, nur daß *L*, als die Last, jetzt unbekannt ist. Zuerst wird man nun, wie vorhin, finden, daß schon die Hebelschwere im Stande ist, 30 Pfund Last zu erhalten. Hangt man in *b* noch 2 Pfund Kraft an; so wird dadurch über jene 30 Pfund noch ein neuer Theil Last erhalten werden, den man *y* nenne. Hierauf schließe man:

$ca : cb = 2$ Pfund : y Pfund
oder 1 Zoll : 11 Zoll = 2 Pf. : y Pfund,
so ist $y = \frac{11 \times 2}{1} = 11 \times 2 = 22$ Pfund.

Die ganze Last, L, beträgt demnach 30 Pf. + 22 Pf. das ist, 52 Pfund.

Aufgabe.

§. 194. Der physische Hebel sey wie in (§. 190.) und in (*Fig.* 43.). Es sollen von ihm gegeben seyn Länge und Schwere, Last und Kraft, wie auch die Lage seines Mittelpuncts der Schwere; man verlangt die Stelle des Ruhepuncts für das Gleichgewicht an ihm zu finden.

Auflösung mit Beweis.

Alles ist demnach wie in (§. 190.); nur daß jetzt nebst der Last, L, = 52 Pfund, auch die Kraft, K, = 2 Pf., gegeben wird, der Ort des Ruhepuncts aber gesucht werden soll. Man denke wieder, wie dort, ein, der Hebelschwere gleichendes, Gewicht von 6 Pfund im Mittelpuncte der Schwere, d, (*Fig.* 43.) angehangen; so hat man einen mathematischen Hebel mit drey Gewichten, L, H und K, in den Wirkungspuncten, a, d und b. Nun verfahre man eben so, wie man verfuhr, da man bey dem wirklich mathematischen Hebel mit drey Gewichten, in (§. 139.), den Ruhepunct suchte. Denselben suche man nehmlich zuerst für den besondern Hebel, db, mit den Gewichten, $H = 6$ Pfund und $K = 2$ Pfund. Die Entfernung seines Ruhepuncts von d nach b hin heiße indessen z. Man schließe, vermöge (§. 132.) $H + K : K = db : z$

das ist, 6 Pf. + 2 Pf. : 2 Pf. = 6 Zoll : z Zoll
oder 8 Pf. : 2 Pf. = 6 Zoll : z Zoll
aufgehoben 4 Pf. : 1 Pf. = 6 Zoll : z Zoll
aufgehoben 2 Pf. : 1 Pf. = 3 Zoll : z Zoll

demnach ist $z = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ Zoll.

Der gesuchte Schwerpunct des besondern Hebels, db, liegt also unter n, und heiße selbst n. Dieser Punct, n, drückt nun vertical niederwärts mit einer Kraft $= H + K$, oder wie ein in ihm hangendes Gewicht $= 6 + 2$ oder 8 Pfund. (§. 97.) Man betrachte ferner den besondern Hebel, an, welcher schon mathematisch ist. Seine Länge beträgt $7\frac{1}{2}$ Zoll. Im Puncte, n, ist er bereits mit 8 Pfund beschwert und im Puncte, a, trägt er die Last, $L = 52$ Pfund. Für ihn wird die Entfernung des Ruhepuncts von a her, welche indessen q heißen mag, gefunden, indem man schließt: (§. 132.)

$$L + n : n = an : q$$

oder 52 Pf. + 8 Pf. : 8 Pf. = $7\frac{1}{2}$ Zoll : q Zoll
das ist 60 Pf. : 8 Pf. = $\frac{15}{2}$ Zoll : q Zoll
aufgehoben 15 : 2 = $\frac{15}{2}$: q
aufgehoben 1 : 2 = $\frac{1}{2}$: q
mit 15.
demnach $q = 2 \bowtie \frac{1}{2} = 1$ Zoll.

In c ist also der gesuchte Ruhepunct des physischen Hebels, ab.

Zusatz.

§. 195. Die drey Aufgaben, welche vom physischen Hebel der ersten Art in den Paragraphen (190, 193, 194) gelöst worden sind, wird nun jeder, im Bezug auf den Hebel der zweyten Art, selbst zu lösen im Stande seyn. Er befolge nur den angewiesenen Weg, und verwandle jedes Mahl bald Anfangs den Mittelpunct der Schwere in ein Gewicht, damit der Hebel sich in einen mathematischen verwandle. Will man aber, daß auch bey dem Hebel der zweyten Art, wenn die Last in der kleinern Entfernung vom Ruhepuncte, wie es ordentlicher Weise zu seyn pflegt, wirket, die Hebelschwere der Kraft zur Beyhülfe gereichen soll: so muß die Last, mit ihrer Schnur über eine Rolle gelegt, aufwärts ziehend angebracht werden, wie $3 \bowtie K$ (*Fig.* 17.);

die

die Kraft hingegen muß, frey am Hebel hangend, niederwärts wirken.

Erklärung.

§. 196. Unter einer Kramer- oder Kaufmannswage versteht man einen physischen gleicharmigen Hebel der ersten Art, welcher so eingerichtet ist, daß er eine horizontale Lage annimmt, wenn zwey Schwerkräfte, die an ihm wirken, gleich groß sind: durch die nicht horizontale aber zu erkennen giebt, daß die eine von beyden nicht nur größer sey als die andre, sondern auch, ob diese von jener mehr oder weniger übertroffen werde.

Zusätze.

§. 197. Man darf billig voraussetzen, daß schon aus dem bürgerlichen Leben bekannt ist, was bey einer solchen Wage der Wagebalken, die Schalen, die Zapfen und die Zunge genennt wird; ingleichen was die Ausdrücke sagen wollen: die Wage steht innen, die Wage giebt auf der einen oder andern Seite einen Ausschlag. Dieses alles bedarf also hier keiner weitern Erklärung.

§. 198. Dasjenige, was die Zapfen des Wagebalkens zunächst trägt, heißt die Gabel, und die beyden in ihr eingebohrten Oeffnungen für die Zapfen heißen die Lager derselben, oder auch die Pfannen. Da, wo am Wagebalken die Schalen hangen, sind die Wirkungspuncte ihrer Schwerkräfte oder ihre Aufhängepuncte.

Aufgabe.

§. 199. Wie eine Kramerwage einzurichten ist, wenn sie das, was in (§. 196.) gefordert wird, leisten soll.

Auflösung mit Beweis.

Der auf eine besondre Weise eingerichtete mathematische Hebel, welcher in seinem Ruhepuncte, an einer unbiegsamen mathematischen Linie ein Gewicht trägt, und in den

Paragraphen (161 bis 167) zureichend erklärt worden ist, leistet in seiner Art alles, was von der Kramerwage verlangt wird. Nur muß er nicht, wie dort in (*Fig.* 42.), ungleiche, sondern gleiche Arme haben, damit er durch seinen horizontalen Stand nicht nur, wie dort, anzeigen kann, daß die zwey in seinen Grenzpuncten an ihm gegen einander wirkenden Schwerkräfte im Gleichgewicht sich befinden, sondern daß beyde, auch für sich betrachtet, gleich sind. Demnach werde die Kramerwage jenem Hebel gemäß, aber als physischer Hebel eingerichtet; welches auf folgende Art möglich ist.

In einer metallnen Stange, *df*, (*Fig.* 46.) die als ein Hebel zum Wagebalken dienen soll, denke man sich der Länge nach eine gerade Linie, *acb*, die bey ihren Grenzpuncten, *a* und *b*, zwey, mit Einrechnung des Zubehörs, gleich schwere Schalen eingehangen trägt. Diese Linie selbst habe in ihrer Mitte, *c*, gleichweit von beyden Wirkungspuncten, *a* und *b*, der Schalen, den Ruhepunct, *c*, der vermittelst zweyer Zapfen, die in den Pfannen einer Gabel (§. 198.), welche oben an einem locker eingehangnen Ringe gehalten werden kann, gelegt sind, an seinem Orte erhalten wird. Alles Metall sey in dem Wagebalken, *df*, so vertheilt, daß seine Längenlinie, *acb*, sobald sie horizontal gerichtet wird, in die Verticallinie, *gh*, des Ruhepuncts, *c*, nahe unter ihm, den Mittelpunct, *o*, der Schwere des Metalls bekommt. In diesem Puncte, *o*, kann man sich die Schwere des ganzen Wagebalkens vereint denken; und wegen des Zusammenhangs der Metalltheile ist das Stück, *co*, der Verticallinie, *gh*, vom Ruhepuncte, *c*, welches zwischen beyde Puncte, *c* und *o*, fällt, als eine mathematische unbiegsame Linie zu betrachten, an welcher der Punct, *c*, den Punct, *o*, wie ein Gewicht trägt. Demnach ist nun die Linie, *ab*, welche längs durch den Wagebalken geht, ein mathematischer, gleicharmiger, geradliniger Hebel der ersten Art, der außer den zwey gleichen Schwerkräften der Schalen, die an seinen Armen in *a* und *b* wirken, noch

ein

ein Gewicht, nehmlich den Mittelpunct der Schwere, *o*, des Wagebalkens, in seinem Ruhepuncte, *c*, vermittelst einer unbiegsamen geraden Linie, *c o*, trägt, welche auf dem Hebel, *a c b*, bey allen seinen Wendungen stets perpendicular steht. Dieser Hebel aber ward eben in der Kramerwage verlangt; also leistet sie, was sie soll, weil er dieses alles leistet.

Zusätze.

§. 200. Es ist in der gegebenen Lösung voriger Aufgabe der sogenannten Zunge bey der Wage mit Bedacht keine Erwähnung geschehn, damit der Beweis für die Hauptsache leichter übersehn werden könnte. Diese Zunge ist auch in der That ein Nebenwerk, und könnte ganz wegbleiben, wenn nur das Auge für sich im Stande wär, die horizontale Lage des Wagebalkens, auf welche beym Gleichgewicht alles ankommt, genau zu erkennen. Dieses vermag es aber nicht sicher genug. Um ihm nun Sicherheit zu gewähren, so wird auf den Wagebalken die Zunge, in der Form eines schlanken geraden Kegels oder einer dergleichen Pyramide, mit ihrer Achse, *g c*, (*Fig.* 46.) perpendicular im Ruhepuncte, *c*, gegen die Linie, *a c b*, des Balkens gestellt, welche durch den Ruhepunct, *c*, sowohl, als durch beyde Wirkungspuncte, *a* und *b*, der Schalen zugleich geht. Denn nun wird es geschehn, daß, sobald die Linie, *a b*, horizontal liegt, zugleich die Zungenspitze bey *g* sich in der Verticallinie des Ruhepuncts befindet (§. 42.), und hiermit zugleich innerhalb der Gabel wahrgenommen wird, deren Fläche in jener Verticallinie nothwendig stets ruht, weil sie von der Schwerkraft der Wage angestrengt wird. Demnach kann das Auge, sobald es die Zunge in der Gabel stehn sieht, sicher urtheilen, daß jetzt die Linie, *a b*, im Wagebalken die horizontale Lage habe. Es muß übrigens auf die Schwere der Materie, aus welcher die Zunge besteht, sogleich Rücksicht genommen werden, wenn der Mittelpunct der Schwere des Wagebalkens bey seiner Ausarbeitung zu bestimmen ist.

§. 201.

§. 201. Wenn nun die Wage mit den gleich schweren, aber noch leeren Schalen an ihren gleichlangen Armen, sobald sie empor gehalten wird, die Zunge innerhalb der Gabel zur Ruhe bringt; so wird sie eben dieses thun, wenn in beyde Schalen gleich viel, der Schwere nach, eingelegt ist, etwa in die eine die zu verkaufende Waare, in die andre ein Gewicht. Sind beyde Einlagen aber nicht gleich schwer, so wird die Zunge nach der Seite hin, wo das Uebergewicht ist, mehr oder weniger ausschlagen, nachdem dasselbe mehr oder weniger beträgt. Durch Vermehrung oder Verminderung der Einlage auf einer oder der andern Seite wird jedes Mahl das Gleichgewicht hervorgebracht werden können. (§. 163. 164.)

Erklärung.

§. 202. Die Wage heißt empfindlich, wenn sie, bey ungleich schweren Einlagen in die Schalen, auch schon ein sehr kleines Uebergewicht durch einen merklichen Ausschlag der Zunge angiebt. Im entgegen gesetzten Falle wird sie träge (faul) genennt.

Aufgabe.

§. 203. Worauf es bey Einrichtung einer Wage ankommt, wenn sie empfindlich seyn soll.

Auflösung.

Es kommt dabey an:

1) auf die größere oder geringere Entfernung, welche man dem Ruhepuncte, *c*, (*Fig.* 46.) von dem Mittelpuncte der Schwere, *o*, im Wagebalken, *d f*, giebt. Je geringer diese Entfernung ist, um so viel empfindlicher wird die Wage seyn;

2) auf die größere oder geringere Schwere sowohl der Wage selbst, als auch der Einlagen in die Schalen. Je geringer die Schwere ist, desto mehr Empfindlichkeit verstattet sie der Wage;

3) auf

3) auf die Form der Zapfen. Wenn diesen nehmlich eine solche Form gegeben wird, daß ihre Durchschnitte keine Zirkel, wie in (*Fig.* 44. *a.*), sondern länglichrunde Flächen oder auch herzförmige Flächen sind, und sie in die Pfannen nach derjenigen Stellung eingelegt werden, welche in (*Fig.* 44. *b.* und *Fig.* 45.) vorgezeichnet ist; so gewinnt dabey die Empfindlichkeit der Waze.

Beweis.

No. 1. in der Auflösung beruht ganz auf (§. 166.), wo eine kleinre unbiegsame Linie für das Mittelgewicht am Ruhepuncte den Hebel zur deutlichen Anzeige des Uebergewichts auf einer Seite fähiger machte, als eine größre.

No. 2. gründet sich theils auf den eben angezeigten (§. 166.), wo ein kleinres Mittelgewicht den Ausschlag des Hebels auf die eine Seite mehr beförderte, als ein größres. Was dort nehmlich das Mittelgewicht war, das ist bey der Wage der Mittelpunct der Schwere ihres Balkens. Theils aber gründet sich No. 2 auch darauf, daß ein leichter gearbeiteter Wagebalken und weniger belästigte Schalen an den Zapfen gegen die Pfannen eine geringre Friction bewirken. (§. 186.)

Die Einrichtung endlich No. 3 dient auch, die Friction zu schwächen; weil, bey der dort angegebenen Form und Stellung der Zapfen, ihrer physischen Berührungspuncte mit den Pfannen weniger werden.

Zusatz.

§. 204. Diese Vortheile für die Empfindlichkeit der Wagen sollen und können vorzüglich bey denjenigen angebracht werden, auf welchen man Körper, die bey geringer Schwere schon großen Werth haben, als Diamanten, Perlen und Gold, abwägen will. Bey Wagen, auf welche oft centnerschwere Lasten gebracht werden müssen, geht es

nicht

nicht durchaus an; denn diese müssen für sich schon stark und also auch gar beträchtlich schwer gearbeitet seyn.

Erklärung.

§. 205. Eine Kramerwage heißt und ist falsch und trügerisch, wenn sie so eingerichtet ist, daß ihre Zunge zwar, so lange die Schalen leer sind, inne steht, und sie also richtig scheint: die aber gleichwohl, wenn Waare und Gewicht eingelegt werden, dem Käufer von der erstern nicht so viel zuwägt, als das letztre anzeigt, obschon die Zunge nicht ausschlägt.

Zusatz.

§. 206. Obwohl die Kramerwage auf mehr als eine Art trügerisch eingerichtet werden kann, so daß theils mechanische, theils auch physische Wahrheiten dabey gemißbraucht werden: so soll doch hier die Betrachtung nur bey dem einen Betruge und seiner Entdeckungsregel stehen bleiben, vermöge welches den Armen der Wage eine ungleiche Länge gegeben, der Mittelpunct der Schwere des Balkens aber in die fortgesetzte Achsenlinie der Zunge gebracht wird.

Aufgabe.

§. 207. Wie der versuchte Betrug mit einer Wage, dergleichen im vorigen Paragraph angegeben ward, entdeckt werden kann.

Auflösung mit Beweis.

Die Falschheit dieser Wage beruht auf folgenden Umständen. Die Linie, ab, (*Fig.* 46.) im Wagebalken, df, innerhalb der Wirkungspuncte, a und b, der Schalen, hat den Ruhepunct, c, nicht in ihrer Mitte, sondern etwas näher der einen Grenze, a, als der andern, b. Doch wird der Unterschied der Weiten, ca und cb, nicht so beträchtlich gewählt, daß er leicht in die Augen fallen könnte. Das

Metall

Metall des Balkens ist so vertheilt, daß, bey seiner horizontalen Lage, der Mittelpunct seiner Schwere, *o*, unter den Ruhepunct, *c*, in des letztern Verticallinie und hiermit auch in die fortgesetzte Achsenlinie, *g c*, der Zunge zu liegen kommt. Wenn dieser Wagebalken an der Gabel empor gehoben wird; so kommt er aus eben dem Grunde, der bey der aufrichtigen Wage Statt findet, in eine horizontale Lage. Würden aber nun in *a* und *b* gleichschwere Schalen eingehangen; so müßte die Zunge nach *b* hin einen Ausschlag geben, wegen des größern Moments (§. 123.), das die Schale daselbst hätte, als welcher die größre Entfernung, *c b*, vom Ruhepuncte gegeben ist. Es werden daher die Schalen von verschiedner Schwere gemacht, und zwar so, daß die Schwere der einen in *b* zur Schwere der andern in *a* sich verhält, wie die kleinre Entfernung, *c a*, der letztern vom Ruhepuncte zur größern Entfernung, *c b*, der erstern. Diese falsche Wage nun, wenn sie mit den eingehangnen Schalen aufgezogen wird, verräth ihre Falschheit nicht; denn, nach den erklärten Hebelgesetzen, wird die Zunge noch innen stehn. Sobald aber mit dieser Wage einem Käufer Waare zugewogen wird, und der Verkäufer die Waare in die Schale bey *b*, wo die größere Entfernung, *c b*, vom Ruhepuncte, *c*, hinfällt, einlegt, das Gewicht aber in die Schale bey *a*; so giebt, beym Innestand der Zunge, das Gewicht mehr an, als die Waare beträgt. Das Gewicht in *a* nehmlich wird sich zur Waare in *b* verhalten, wie *c b* zu *c a*, das ist, wie das Größere zum Kleinern. Hiermit wird dann der Käufer hintergangen seyn.

Aus der bisher gegebenen Erklärung entspringen folgende Regeln, die Falschheit dieser Wage zu entdecken.

1) Man lege in beyde Schalen, wenn sie leer sind, gleichviel von solchen Gewichten, deren Genauigkeit man schon kennt; so wird die Zunge nicht inne stehn, wie sie es bey der aufrichtigen Wage müßte, sondern das Gewicht in der Schale unter *b* wird einen Ausschlag geben, weil

es,

es, der größern Entfernung, *cb*, wegen, ein größeres Moment (§. 123.) als das andere hat.

2) Man nehme die leeren Schalen ab und hange sie, umgewechselt, wieder ein; so wird diejenige, welche unter *b* hängt, einen Ausschlag geben. Denn sie hat ein größres Moment als die andre; weil sie nicht nur für sich schwerer ist als jene, sondern auch nun eine größre Entfernung vom Ruhepuncte erlangt hat.

3) Wenn die Schalen bereits mit der Waare und dem Gewichte belegt sind, und die Zunge inne steht; so wechsle man beyde, so wie sie belegt sind, an der Wage um. Die Schale mit dem Gewicht, welche nun in *b* kommt, wird einen Ausschlag geben, und zwar aus der doppelten, bey No. 2 angezeigten Ursache.

Zusätze.

§. 208. Damit das, was bey No. 2 und 3 im vorigen Paragraph angegeben ist, vom Käufer, wenn er billige Ursachen dazu hat, gethan werden kann, sieht man in einer guten Polizey darauf, daß bey Wagen, die in öffentlichem Handel gebraucht werden, die Schalen sich leicht ausheben lassen.

§. 209. Die unter No. 3 angegebene Probe verdient vor den übrigen beyden den Vorzug, weil sie am besten im Stande ist, den Betrug einer Wage auch dann zu entdecken, wenn derselbe auf einer andern falschen Einrichtung beruhen sollte, als die vorhin beschriebene ist. Doch wird auch No. 1 dann Nutzen schaffen, wenn nur die gewählten Gewichte im Verhältniß zu der Wagenstärke schwer genug sind. No. 2 aber wird zwar bey der erklärten Verfälschung der Wage den Betrug entdecken, aber nicht bey jeder andern denkbaren Verfälschung.

Erklärung.

§. 210. Eine Wage, vermittelst welcher man mit einem und demselben Gewichte, das sich an einem ihrer Arme ver-

verschieben läßt. Lasten von verschiedner Schwere abwägen kann, wird eine Schnellwage genennt.

Zusatz.

§. 211. Es wird von ihr, wie von der Kramerwage, verlangt, daß sie, so bald die an ihr gegen einander wirkenden zwey Schwerkräfte im Gleichgewichte sind, dasselbe durch die horizontale Lage des Balken und den damit erfolgenden Innestand der Zunge anzeige; die Kräfte mögen dann entweder für sich gleich seyn, wie dieses der Fall bey der Kramerwage war, oder sie mögen auch, für sich betrachtet, ungleiche Stärke haben. Diese Wage soll endlich, wie jene, durch den Ausschlag andeuten, auf welche Seite das Uebergewicht falle, und ob es wenig oder sehr beträchtlich sey.

Aufgabe.

§. 212. Wie eine Schnellwage eingerichtet werden kann, wenn sie das, was in (§. 210. 211.) gefordert ward, leisten soll.

Auflösung.

Ihre Einrichtung kann auf mehr als eine Art geschehn; es ist aber genug, hier nur diejenige anzugeben, welche von den Regeln bey der Kramerwage am wenigsten abweicht.

Der Wagebalken sey ein metallner und hiermit physischer Hebel der ersten Art. (*Fig.* 47.) Die längst durch ihn hinlaufende gerade Linie, *a c b*, sey diejenige, in welcher der Ruhepunct, *c*, und die beyden Wirkungspuncte, *a* und *b*, der hernach anzubringenden Schwerkräfte liegen; doch befinde sich der Ruhepunct, *c*, nicht, wie bey der Kramerwage, im Mittel derselben Linie, sondern nahe bey dem Wirkungspuncte, *a*, der für die anzuhängende Last bestimmt ist. In der Verticallinie, *c n*, die dem Ruhepuncte, *c*, bey der horizontalen Lage der Linie, *a c b*, zugehört,

gehört, befinde sich die Achse der aufgesetzten Zunge, *n*, und das Metall, woraus Balken und Zunge gearbeitet sind, sey so vertheilt, daß der Mittelpunct seiner Schwere, *v*, gleichfalls in die angezeigte Verticallinie, *cn*, des Ruhepuncts, *c*, aber nah unter ihm zu liegen kommt. Dieses ist möglich, wenn dem kurzen Arme, *ca*, mehr Metall gegeben wird, als dem langen, *cb*. Man trage nun die Linie, *ca*, auf die Linie, *cb*, so viel Mahl, als es geschehen kann, und bezeichne die gemachten Abtheilungen mit Ziffern, so daß an das Ende der ersten von *c* her eine Null gesetzt wird, die folgenden aber mit eins, zwey, drey u. s. w. bemerkt werden. Man sehe (*Fig.* 47.). In dem Grenzpuncte, *a*, der Längenlinie, *ca*, im kurzen Arme des Balkens hänge man eine Wagschale ein, die von einer bestimmten Schwere, etwa hier ein Pfund schwer ist. Von gleicher Schwere richte man ein Gewicht zu, *K*, das oben mit einem beweglichen Ringe versehen ist, und vermittelst desselben am langen Arme der Wage hin und wieder verschoben werden kann. Wenn endlich der Ruhepunct, *c*, mit Zapfen versehen wird, welche in die Pfannen einer Gabel eingelegt sind; so ist die Wage im Stande, was die Aufgabe fordert, zu leisten. Man lege nehmlich in die Schale die abzuwägende Last, *L*, verschiebe das Gewicht, *K*, so lange, bis die Zunge inne steht; die Ziffer der Abtheilung am langen Arme, welche dann der Ring trifft, zeigt an, wie viel Pfund in die Schale eingelegt sind. Trifft er nicht genau an die Grenze einer gemachten Abtheilung, jede derselben aber ist wieder in 32 kleinere gleiche Theile zergliedert, und er ruht etwa innerhalb 3 und 4 der großen, bey 12 der kleinen Abtheilungen; so erkennt man, daß die Last über 3 Pfund noch 12 Loth schwer ist.

Beweis.

Man führe den Beweis nur für einen einzigen beliebigen Fall an dieser Wage; es wird sich dann zeigen,

daß

daß er auch auf alle andre Fälle bey ihr anwendbar, und also allgemein für sie sey.

Man setze demnach, daß beym Innestand der Zunge der Ring des Pfundgewichts bey der Ziffer, 4, stehe; so läßt sich erweisen, daß dann die eingelegte Last vier Pfund betrage.

Da nehmlich die Metallschwere des Wagebalkens (*Fig.* 47.) im Mittelpuncte seiner Schwere, *v*, vereint gedacht werden kann; so ist der Balken selbst als eine mathematische, und daher schwerlose, Hebellinie, *acb*, anzusehn, welche, vermittelst einer ebenfalls mathematischen, unbiegsamen Perpendicularlinie im Ruhepuncte, *c*, ein Gewicht, *v*, trägt, das der Balkenschwere gleichgilt. In den Puncten, *a* und *f*, wirken über dieses an der Hebellinie, *acb*, zwey Schwerkräfte; in *a* nehmlich die Schale, die ein Pfund schwer ist, nebst der in sie gelegten Last, *L*, in *f* aber das angeschobene Gewicht von einem Pfunde. Die Entfernungen vom Ruhepuncte, *c*, sind *ca* und *cf*. Es erscheint hier also, wie bey der Kramerwage (§. 199.), der besondre mathematische Hebel mit dem Gewicht am Ruhepuncte (§. 161 — §. 164.), der hier ungleicharmig ist; und an ihm muß, bey dem horizontalen Stande des Wagebalkens, oder, welches gleich gilt, beym Innestand der Zunge die Proportion Statt finden:

$$K : L + 1 \text{ Pfund} = ca : cf$$

das ist $1 \text{ Pf.} : L + 1 \text{ Pf.} = 1 : 5.$

Daher ist nach (A. §. 253.)

$$5 \bowtie 1 \text{ Pf.} = 1 \bowtie (L + 1 \text{ Pf.})$$

das ist $$5 \text{ Pf.} = L + 1 \text{ Pf.}$$

Nach (A. §. 39 und 40.) $5 \text{ Pf.} - 1 \text{ Pf.} = L + 1 \text{ Pf.} - 1 \text{ Pf.}$

das ist $$4 \text{ Pfund} = L$$

das heißt: die eingelegte Last beträgt 4 Pfund, oder so viel Pfund, als die Ziffer anzeigt, bey welcher der Ring des Gewichts ruht.

Hätte aber das Gewicht, *K*, bey dem Innestande der Zunge, an der Ziffer 3 oder 5 geruht; so würde sich auf

gleichem

gleichem Wege haben erweisen lassen, daß im ersten Falle die eingelegte Last drey Pfund, im zweyten aber fünf Pfund betragen hätte. Der Beweis ist demnach allgemein.

Zusätze.

§. 213. Was in (§. 203.) wegen der Empfindlichkeit einer Wage erklärt worden ist, läßt sich auf die Schnellwage auch anwenden; insofern sie es, wenn sie zu Abwägung großer Lasten eingerichtet ist, wegen ihrer dann nothwendigen Stärke und Schwere verstattet.

§. 214. Ihre Richtigkeit kann geprüft werden, wenn man anstatt der Last in die leere Schale Gewichte legt, deren Genauigkeit schon bekannt ist, z. E. fünf Pfunde, und nun den Ring des Pfundgewichts der Wage selbst auf diejenige Ziffer verschiebt, welche der Anzahl der eingelegten Pfunde gleich ist, z. E. auf fünf. Steht jetzt die Zunge inne, so ist die Wage offenbar richtig. Fände man das Gegentheil, so wär sie falsch.

§. 215. Man kann auch die Schnellwage so einrichten, daß erst, nach Anhängung der leeren Schale, die Zunge inne steht. Bey dieser Einrichtung werden die numerirten Abtheilungen des langen Arms, *cb*, nicht mit Null, wie es in (*Fig.* 47.) sich findet, sondern sogleich mit Eins angefangen werden.

§. 216. Man kann auch Wagen denken, die unter die bisher betrachteten zwey Arten zwar nicht gehören, aber doch mit beyden in etwas überein kommen, und auch zu unsern Zeiten, wenigstens für den Privatgebrauch, wieder in Vorschlag gebracht worden sind, nehmlich solche, die zu Abwägung einer Last stets nur ihr halbes Gewicht nöthig haben, oder stets nur ein Drittel davon, u. s. w. Ihre Einrichtung kommt auf folgende Umstände an. Verlangt man z. E. eine Wage, welche eine Last stets mit halbem Gewichte abwägt; so wird dieselbe zwar in Rücksicht der Lage des Ruhepuncts gegen den Mittelpunct der Schwere, und in Rücksicht des Standes der Zunge, wie die zwey

schon beschriebenen Wagen eingerichtet: aber die Längen ihrer Arme verhalten sich gegen einander wie Eins zu Zwey, und an beyden trägt sie eine Schale. In ihrem Balken kann entweder das Metall so vertheilt seyn, daß derselbe schon ohne eingehangne Schalen die Zunge inne stehen läßt, auf die Art, wie es bey derjenigen Schnellwage war, die in (§. 212.) beschrieben ist; oder die Einrichtung ist so getroffen, daß der Innestand der Zunge erst erfolgt, wenn beyde Schalen leer eingehangen sind. Dann wird der Schale am längern Arme weniger Schwere gegeben, als der andern, und die Schwere einer jeden wird sogleich in die Schwere des Balkens mit eingerechnet auf die Art, wie es bey der einen Schale derjenigen Schnellwage vorgestellt ist, welche in (§. 215.) betrachtet ward.

Die abzuwägende Last wird nun in die Schale des kurzen, das Gewicht aber in die Schale des doppelt langen Arms gelegt; und eben darum, weil dieser Arm gegen den andern doppelt lang ist, wird das in seiner Schale liegende Gewicht, beym Innestand der Zunge, jedes Mahl nur die Hälfte von der Schwere der abzuwägenden Last betragen. Hat man demnach von Gewichten vier Pfunde eingelegt; so weiß man, daß die Last acht Pfund schwer ist, u. s. w. Wer die bereits schon vorhin erwiesenen Sätze wohl verstanden hat, findet den Beweis hierzu gewiß sogleich selbst. Hätte der eine Arm die dreyfache Länge des andern; so würde man stets mit drey Mahl wenigerm Gewicht, als die Schwere der Last beträgt, dieselbe abwägen können.

Eine solche Wage gewährt also den Vortheil, daß man bey ihrem Gebrauche wenigere Gewichte nöthig hat, als bey der Kramerwage, und daß sie, in der Hand gehalten oder irgendwo aufgehangen, weniger lastet als jene.

Zusätze zum physischen Hebel überhaupt.

§. 217. Außer den bisher betrachteten verschiednen Gattungen der Wagen kommt der Hebel noch bey vielen

andern Werkzeugen und mannigfaltigen Anlagen vor, die dem bürgerlichen Leben beträchtliche Vortheile gewähren. Davon werden hier nur einige Beyspiele gegeben und kurz erläutert werden können.

§. 218. Als ein physischer Hebel fällt sogleich der so genannte Hebebaum, dessen man sich zur leichtern Bewegung großer Lasten auf verschiedne Art bedient, in die Augen. Es sey *L* (*Fig.* 48.) eine mit Waaren angefüllte Kiste; der Hebebaum, *a b*, welcher auf einem ihm untergeschobenen Stück Holz, *c*, ruht, hält dieselbe bey *a* von dem Fußboden, *d f*, empor, vermittelst einer Menschenkraft, die sich bey *b* auf den Hebebaum niederstämmt. Hier erscheint der geradlinige Hebel der ersten Art, der zwey ungleich lange Arme, *c a* und *c b*, den Ruhepunct aber über der Widerlage, *c*, hat. Die Last ist im Aufdrucke der Kiste, *L*, bey *a* zu bemerken, indem sie daselbst gegen den Fußboden nieder zu schlagen strebt; die Kraft liegt in der Niederstämmung der Arme eines Mannes auf *b*. Diese Niederstämmung, wenn sie nach der Richtung, *n b*, perpendicular gegen den Hebebaum in *b* geschieht, hat vortheilhaft zur Entfernung vom Ruhepuncte, *c*, die Länge des längern Hebelarms, *c b*. Die Schwere des physischen Hebels selbst gereicht hier der Kraft zur Beyhülfe. (§. 192.)

§. 219. Auch selbst die vom Hebel, *a b*, (*Fig.* 48.) aufwärts gehaltne Last, *L*, kann als ein Hebel angesehen werden. Man denke nehmlich in ihr den Mittelpunct der Schwere, *e*, und durch denselben diejenige Verticalfläche, welche zugleich den Mittelpunct der Schwere, *v*, des Hebels, *a b*, trifft. In ihr denke man auch die Puncte, *d*, *a*, *g*, *h* und *f*; welche Vorstellung aus Betrachtung der Figur jedem als möglich erscheinen wird. Die Puncte, *e* und *d*, verbinde man durch die Linie, *e d*; so erscheint der Winkelhebel, *e d a*. Sein Ruhepunct ist in *d*; an seinem Arme, *d e*, wirkt der Punct, *e*, das ist, die Last, *L*, selbst, nach der Verticallinie, *e g*, unter der Entfernung, *d g*, vom Ruhepuncte, *d*; an seinem andern Arme, *d a*, wirkt

der

der emporstrebende Druck des Hebels, *a b*, als Kraft, nach der Richtung, *a m*, unter der Entfernung, *d h*. Da nun *d h*, als das Ganze, größer ist, als ein Theil von ihm, *d g*; so wirkt auch hier die in *a* aufdruckende Kraft gegen die Last im Puncte, *e*, mit Vortheil.

§. 220. Will man den Hebebaum, *c b*, (*Fig.* 49.) ohne eine besondre, untergeschobene Widerlage gebrauchen; so stämmt man ihn, mit dem einen Ende, *c*, selbst, gegen den Fußboden, *c d*, und giebt ihm hiermit in *c* seinen Ruhepunct. Wenn nun die Last, *L*, etwa ein Ballen Waare, auf ihn in *a* drücket, und eine menschliche Kraft ihm in *b*, wo er niederzuschlagen strebt, entgegen wirkt: so erscheint sogleich ein physischer Hebel der zweyten Art, *c a b*, welcher, wenn die Kraft am langen Arme, *c b*, unter einem rechten Winkel drückt, ihr Vortheil gewähren muß. Doch erkennt man leicht, daß bey dem Gebrauche dieses Hebels seine eigne Schwere auf die Seite der Kraft fällt, und er also in dieser Rücksicht für sie nicht so vortheilhaft ist, als es der Hebel der ersten Art war. (§. 218.) Ueber dieses konnte bey jenem der Mensch seine Kraft niederwärts drückend anwenden; hier aber muß er es aufwärts thun. Im erstern Falle gewinnt er gleichwohl mehr, weil ihm da die Schwere seines eignen Körpers zu Statten kommt.

§. 221. Auch hier könnte man die Last, ungefähr auf die Weise, wie es (§. 219.) bey dem Hebel der ersten Art geschah, selbst in einen Winkelhebel verwandelt denken, gegen welchen dann der Hebebaum seine Wirkung äußerte.

§. 222. Daß auf gleiche Art eine Brechstange bey ihrer Anwendung als ein Hebel betrachtet, und, der Wirkung nach, seinen Gesetzen gemäß beurtheilt werden kann, wird nun leicht verstanden werden.

§. 223. Eine eiserne Zange, deren Umriß in (*Fig.* 50.) bey den Buchstaben, *e c b d f a*, gegeben ist, und welche man gebraucht, wenn ein fest eingeschlagner Nagel erst kräftig gefaßt, und dann durch eine vervielfachte Stärke der Hand ausgezogen werden soll, besteht aus zwey physischen,

krummlinigen Hebeln (§. 118.) der ersten Art, *b c d* und *a c e*, mit ungleich langen Armen. Ihr gemeinschaftlicher Ruhepunct, *c*, liegt in dem Niet der Zange. Die Wirkung des Zusammendrucks innerhalb, *d e*, wo der Nagel durch den perpendicularen Andruck beyder Hände auf *a* und *b* sicher gefaßt wird, ist aus den in der Figur punctirten Linien, *b c d* und *a c e*, zu beurtheilen. Denn diese stellen die zwey mathematischen Winkelhebel vor, welche den physischen krummlinigen Hebeln zum Grunde liegen. (§. 118.) Verhält sich, z. E. in jeder punctirten Linie, der kurze Hebelarm, *c e* oder *c d*, zum langen, *c a* oder *c b*, wie Eins zu Viere; so wird der perpendiculare Druck jeder Hand in *a* und *b* auf den Nagel innerhalb der Oeffnung, *d e*, vierfältig verstärkt. Druckt nun jede Hand mit 10 Pfund Kraft, daß also die Wirkung beyder 20 Pfund beträgt; so wird der Zusammendruck gegen den Nagel auf 80 Pfund Stärke gewinnen.

Soll der gefaßte Nagel nun ausgezogen werden, und man kann die Zange, etwa bey *f*, an einen festen Widerstand, *f g*, anlegen; so zieht man sie bey *a* und *b* gegen denselben an, daß der Nagel gehoben wird. Es wirket nun die Zange auch überhaupt wie ein geradliniger Winkelhebel, den man in den punctirten Linien, *d f* und *f b*, sieht. Derselbe hat den Ruhepunct in *f*, am kurzen Arme, *f d*, wirkt die Last, am langen, *f b*, aber die Kraft; welche letztre eben darum, wenn sie nur, so viel als möglich, perpendicular gegen die Linie, *f b*, druckt, Vortheil gewinnt.

§. 224. Die bekannte Trage, auf welcher von zwey Personen, vermittelst über die Achseln gezogner Gurtbänder, Lasten getragen zu werden pflegen, ist ein physischer, meistentheils etwas krummliniger, Hebel der zweyten Art; und wenn die Last mit dem Mittelpunct der Schwere über die Mitte der Trage gestellt ist, fällt auf jeden der beyden Träger von ihr die Hälfte. Es stelle die etwas gebogene Linie, *a c b*, (*Fig.* 51.) eine solche Trage vor. Die An-

griffe

griffe auf beyden Seiten bey *a* und *b* sollen in einer horizontalen Ebene gedacht werden, und die Last, *L*, in Rücksicht des Mittelpuncts ihrer Schwere, *v*, der vorhin gegebenen Bestimmung gemäß, aufgelegt seyn. Bey *d* und *e* denke man die Achseln der zwey Träger, welche die Gurtbänder, *da* und *eb*, aufwärts halten. Man sehe den Punct, *a*, als Ruhepunct des Hebels, *acb*, an. In *c* drückt die Last, *L*, mit dem Puncte, *v*, vertical nieder; die eine Menschenkraft aber strebt in *b* vertical aufwärts. Die Entfernung, *ao*, der Last vom Ruhepuncte verhält sich nun zur Entfernung, *ab*, der Kraft, wie Eins zu Zwey. Demnach wird, der Hebellehre gemäß, die Kraft in *b* zur Last in *c* oder *o* auch seyn, wie Eins zu Zwey; das ist, in *b* wird die Hälfte der Last getragen. Da nun gleichwohl in *a* und *b* zusammen, nach verticalen Richtungen, welche der Richtung der Last gerade entgegen gesetzt sind, die letztre ganz erhalten wird; so muß ihre andre Hälfte auf *a* fallen. Uebrigens kommt auch noch auf jeden Träger die Hälfte von der Schwere der Trage für sich, wenn anders auch der Mittelpunct ihrer Schwere in ihrer Mitte, *c*, liegt. Dieses wird auf vorige Weise aus den Eigenschaften des Hebels der zweyten Art erwiesen.

Befände sich aber eine Waarenkiste, *L*, äußerlich betrachtet zwar über der Mitte der Trage, aber in sie wärauf der Seite nach *a* hin, Metall gepackt, auf der Seite nach *b* hingegen leichtre Waare an Leinwand, Tuch und dergleichen, daß hiermit der Mittelpunct der Schwere vom Ganzen innerhalb des Metalls, und demnach zwischen *o* und *a* fiel: so würde, wie nun leicht einzusehn ist, der Träger bey *a* mehr belästigt seyn, als der andre bey *b*.

§. 225. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sind auch anwendbar auf Portchaisen und andre Lasten, die von zwey Personen gemeinschaftlich getragen werden.

§. 226. Im Schubkarren erkennt man, wie in der Trage, einen physischen, krummlinigen Hebel der zweyten Art; doch sind die Nebenumstände anders. Sein Ruhepunct

punct nehmlich liegt in der Mitte des Rades, welches ihm zu einer Widerlage dient, die sich leicht fortbewegen läßt. Der aufgeladnen Last entgegen wirkt die emporstrebende Kraft der Hände desjenigen, der den Karren führt. Wird nun die Last dem Rade, und hiermit auch dem Ruhepuncte, nahe genug gebracht; so verringert sich hierdurch ihr Moment (§. 123.) gegen das Moment der Kraft, welche die größre Entfernung vom Ruhepuncte hat, und daher mit Vortheil wirken kann. Es muß aber der Zug der Hände, der die Last erhoben hält, gegen den mathematischen Hebel, der im Karren zu denken ist, so viel als möglich, perpendicular gerichtet seyn. Diesen mathematischen Hebel stellt man sich vor in der geraden Linie, welche aus dem Mittelpuncte des Rades bis in die Mitte der Angriffslinie beyder Hände gezogen wird, und offenbar ein geradliniger Hebel der zweyten Art ist.

§. 227. Bey den Plumpen, durch welche das Quellwasser mit erleichterter Mühe aus der Erde zum Gebrauch herauf gebracht werden soll, wird auch der physische Hebel, auf mehr als eine Art, vortheilhaft angewendet. Man bedient sich dabey z. E. oft eines krummlinigen Winkelhebels, *cvde*, (*Fig.* 52.) etwa so, wie es (*Fig.* 52.) darstellt. Daselbst sey *a* der obere Theil einer Plumpenröhre, in welcher der Plumpenstock vermittelst der Ziehstange, *b*, auf und nieder bewegt werden soll. Diese Bewegung bewirkt der krummlinige Winkelhebel, *cde*, der seinen Ruhepunct bey *v* auf einer unverrücklichen Widerlage hat, mit dem kurzen, geraden Arme, *vc*, bey *o* die Ziehstange, *b*, des Plumpenstocks faßt, und am langen, gebogenen Arme, *vde*, bey *e* durch Menschenhände auf und niederwärts in einem Zirkelbogen bewegt wird. Daß bey *v* und *o*, wie auch über dem, hier nicht sichtbaren, Plumpenstocke an der Ziehstange, Zapfen zur nöthigen Wendung angebracht seyn müssen, läßt sich theils in der Figur bemerken, theils leicht hinzudenken. Wenn nun aus dem Ruhepuncte, *v*, zwey mathematische gerade Linien gezogen werden, die eine, *vo*,

bis

bis zum Wirkungspuncte, *o*, der Ziehstange, *b*; die andre, *vne*, bis zum Angriffe, *e*: so zeigt sich der in den Figur punctirte, mathematische Winkelhebel, *ovne*, mit geraden Armen, welcher dem physicalischen, krummlinigen Winkelhebel, *cvde*, zum Grunde liegt. Wirkt dann die Kraft der Hand auf den Angriff, *e*, so, daß ihre Richtung perpendicular gegen den mathematischen Hebelarm, *ve*, gerichtet ist; so wirkt sie unter der Entfernung, *ve*, vom Ruhepuncte, welche verschiedne Mahl größer ist, als die Entfernung, *vo*, der Last, die man hier im Widerstande des zu bewegenden Plumpenstocks denken muß. Demnach gewährt diese Anlage der Kraft den Vortheil, daß sie verschiedne Mahl geringer als die Last seyn kann.

§. 228. Bey den physischen Hebeln, die vom (§. 210.) an bisher betrachtet worden sind, ward jedes Mahl die Kraft, im engern Verstande (§. 168.), so angebracht, daß sie vom Ruhepuncte eine größre Entfernung bekam, als die Last. Dieses war auch nöthig, weil man durch eine Kraft, welche immer geringer war als die Last, diese gleichwohl mit jener im Gleichgewicht erhalten, oder sie sogar bewegen wollte. Sollte Bewegung bewirkt werden, so mußte man es geschehen lassen, daß die schwächre Kraft sich schneller bewegte, als die stärkere Last. Nun kommen aber Fälle vor, in welchen man der Kraft am Hebel eine langsamere Bewegung zu geben wünscht, als der Last. Soll dieses möglich seyn, so muß die bewegende Kraft, im engern Verstande (§. 168.), dahin versetzt werden, wo in den bisher mitgetheilten Beyspielen die Last sich befand, und die Last dahin, wo in jenen die Kraft wirkte. Das heißt: man muß der Kraft die kleinre Entfernung vom Ruhepuncte geben, und der Last die größre. Man erläutere sich dieses an dem gemeinen Spinnrade, besonders an seinem sogenannten Tritte, den die Spinnerin mit dem Fuße auf und nieder bewegt, wenn sie das Rad im Laufe erhalten will. Dieser Tritt, wie jeden die Ansicht desselben belehrt, ist ein physischer, geradliniger Hebel der zweyten Art.

Als

Als Last, die durch ihn bewegt werden soll, hat man den Nachdruck zu denken, den er vermittelst einer Ziehstange von Zeit zu Zeit der Bewegung des Rades giebt, zum Ersatz desjenigen, was ihr an Geschwindigkeit, wegen der Friction und manches andern Widerstandes, anhaltend verloren geht. Die auf solche Art gedachte Last hat ihren Wirkungspunct vorn am Hebel, und ihre mittlere Entfernung vom Ruhepuncte ist die Hebellänge. Die Stelle, wo die Kraft wirkt, welche sich durch den Fuß der Spinnerin äußert, befindet sich etwas über die Hälfte der Hebellänge, vom Ruhepuncte her gerechnet, hinaus; und ihre Entfernung ist also, in der mittlern Größe, nur etwas über die Hälfte von der Entfernung der Last. Der Fuß wird demnach, mit jedem Auftritte, fast doppelt so stark wirken müssen, als die Last. Da aber, wie die Erfahrung lehrt, auch dieses Doppelte bey dem Spinnrade nur so viel Kraftaufwand erfordert, als eine Spinnerin Stunden lang gewähren kann; eine schnellere Bewegung des Fußes aber, als die Stelle des Hebels, wo sie ihn hinstellt, erfordert, ihr allerdings unbequem und auch ermüdender seyn würde: so ist mit Bedacht hier die Kraft unter der kleinern, die Last hingegen unter der größern Entfernung vom Ruhepuncte angebracht.

Bey dem Tritte des Scherenschleiferrades und des einfachen Schleifsteins wird man eben diese Bemerkungen zu machen haben.

§. 229. Die jetzt erklärte vortheilhafte Einrichtung bey manchen Hebeln in Werken der menschlichen Kunst kommt auch bey dem, der Bewunderung aller Weisen würdigen Hebelwerke vor, welches der große Schöpfer selbst in dem Knochengebäude des Menschen sowohl als der Thiere angelegt hat. Auch da finden sich Hebel, an welchen die bewegende Kraft in der kleinern Entfernung vom Ruhepuncte angebracht ist, die Stelle aber, wo gegen eine Last gewirkt werden soll, in der größern. Zu einem Exempel soll hier die Knochenröhre im Oberarm eines Menschen gewählet

wählet werden. Man denke sich einen Menschen stehend und den Oberarm so horizontal vor sich hinstreckend, daß derselbe perpendicular von der Fläche der Brust ausgeht. Seine Knochenröhre bey dieser Lage stelle die gerade Linie, *a b c*, (*Fig.* 53.) vor. Ihr Ruhepunct, *c*, ist in die Achsel verlegt; ihr andres Ende, *a*, befindet sich am Elbogen. Nahe aber bey dem Ruhepuncte, *c*, etwa in *b*, ist die Kraft vermittelst eines Muskels, dessen Zug in einer schiefen Richtung von *b* nach *d* hin wirken kann, angebracht. Hängt man nun in *a*, das ist, am Oberarm, nahe bey dem Elbogen, ein Gewicht, *L*, etwa von 10 Pfund, an; so erblickt man leicht in der Linie, *a b c*, einen physicalischen geradlinigen Hebel der zweyten Art. Sobald der menschliche Geist, der mit seinem Körper in Verbindung steht, durch seinen Willen auf den Muskelzug, *b e*, nach *d* hin wirkt; so wird das Gewicht in *a* erhalten oder auch gehoben werden. Die Entfernung der Last in *a* vom Ruhepuncte, *c*, ist die Linie, *a c*; die Entfernung der ziehenden Kraft aber in *b* ist die Linie, *c e*, welche aus dem Ruhepuncte, *c*, perpendicular auf die Richtungslinie, *b d*, des Muskelzugs gestellt wird. Das Verhältniß zwischen *c e* und *c a* ist, der Erfahrung gemäß, wie Eins zu Vierzehn; demnach verhält sich die Kraft in *b* zur Last in *a*, wie Vierzehn zu Eins. Beträgt das Gewicht, *L*, zehn Pfund; so wird die Röhre des Oberarms vom Muskel bey *b* mit 10 × 14, das ist mit 140 Pfund oder mit mehr als einem Centner Kraft gehalten. Die Schwere des Arms selbst, die dann auch der Last zufällt, ist hier nicht einmahl in Rechnung gebracht. Zehen Pfund aber sind nicht etwa das Aeußerste, was ein Mann auf die angezeigte Art halten und heben kann. Borelli, der über solche Gegenstände viel observirt hat, nimmt auf 50 Pfund an. In diesem Falle hält und zieht der erwähnte Muskel mit einer Kraft von 14 × 50, das ist, mit 700 Pfund. Der Bau des menschlichen Körpers zeigt viel mehrere und noch wunderbarere Einrich-

tungen

tungen von dieser Art; und eben dergleichen bemerkt man in den Körpern der Thiere.

Bey einem so großen Aufwande von Kraft, den der Schöpfer auf diese Weise bey einer Menge von Muskeln der Menschen und der Thiere machte, wollte seine Weisheit nicht nur die nöthige Schnelle in Bewegung der Glieder befördern; sondern es sollte auch eben hierdurch, daß die Kräfte nah an den Ruhepuncten der Knochen nun angebracht werden konnten, in vielen Fällen die äußere, schöne Form des Gliederbaues überhaupt gewonnen werden.

Anmerkungen.

§. 230. Nachdem bisher sowohl der mathematische als der physische Hebel für diese Anfangsgründe hoffentlich zureichend erklärt worden ist: so wird nun die Rolle (trochlea) zu betrachten seyn, deren Eigenschaften und Gebrauch sich leicht aus jenem ableiten lassen. Es ist zwar von ihr, bald im Anfange der Hebellehre (§. 92 bis §. 95.) schon etwas gesagt worden, aber doch nur so viel, als zum leichtern Vortrage mancher Sätze in jener Lehre nöthig schien. Jetzt soll das Rückständige hinzugesetzt werden. In den angeführten Paragraphen, welche man hier im Zusammenhange zu wiederholen hat, sind bereits folgende Stücke theils erklärt, theils erwiesen worden.

§. 231. Zum Ersten: daß eine mathematische Rolle eine Zirkelfläche sey, *a c*, (*Fig.* 54.), welche auf eine festliegende gerade Linie, *b d*, die ihren Mittelpunct, *c*, durchgeht, perpendicular so gestellt ist, daß sie um dieselbe frey sich drehen kann; indem eine, über ihre Peripherie weglaufende, mathematische, biegsame Linie, *n m*, an deren beyden Enden zwey Kräfte, *L* und *K*, gegen einander wirken, sie nach dieser oder jener Seite mit sich zieht.

§. 232. Zum Zweyten: daß beyde, durch die Kräfte, *L* und *K*, (*Fig.* 8.) von der Rolle abgewickelten und in der Fortsetzung ihrer Fläche sich befindenden Linien, *a e*, und *b f*, in ihren Abwicklungspuncten, *a* und *b*, mit dem

dort

dort einfallenden Radien, *c a* und *c b*, rechte Winkel machen, und also für diese Puncte Tangenten des Zirkels, *a g b*, sind.

§. 233. Zum Dritten: daß an dieser Rolle nur dann das Gleichgewicht zwischen beyden an ihr wirkenden Kräften Statt findet, wenn beyde gleich groß sind, im entgegengesetzten Falle aber die Rolle sich nach der Seite der stärkern Kraft hin zu drehen anfängt, indem die mathematische Fadenlinie ihre Peripherie Theil für Theil, wie man annimmt, mit sich fortzieht, wie etwa ein rauher Faden über der rauhen Peripherie einer hölzernen Rolle thun würde.

§. 234. Zum Vierten: daß es auf das Gleichgewicht keinen Einfluß hat, ob die beyden abgewickelten Fadenlinien unter sich parallel, wie in (*Fig.* 8.), oder nicht parallel sind, wie in (*Fig* 9.) bey den Rollen, *K* und *L*; und eben so wenig, ob die Rollenfläche in einer Verticalfläche ihres Mittelpuncts sich befindet, oder in irgend einer andern Ebene, wenn nur jedes Mahl die Rollenfläche mit den Richtungslinien der Kräfte in einer und derselben Ebene lieget.

§. 235. So lange die Rolle als mathematisch betrachtet wird, kann es auf sie keinen Einfluß haben, ob sie an der Linie, *b d*, (*Fig.* 54.) im Mittelpuncte, *c*, befestigt ist, und dieselbe also mit sich umdreht; oder ob sie für sich um die Linie laufen kann, und letztre in den Widerlagen bey *b* und *d* undrehbar fest liegend gedacht wird. Man nimmt aber ordentlicher Weise den letzten Umstand an, und nennt diese Linie einen Bolzen der Rolle. Wollte man sie aber als mit der Rolle selbst umlaufend betrachten; so würde man sie schicklicher, wie bey dem Wagebalken, Zapfen nennen.

Lehrsatz.

§. 236. Wenn durch Hülfe einer Rolle, *a*, (*Fig.* 54.) eine Last, L_1, beweget wird; welches durch einen kleinen

Zusatz

Zusatz bey der Kraft, *K*, geschieht: so verhält sich, in gleicher Zeit, sowohl der natürliche als der mechanische Weg der Kraft (§. 154.), ingleichen ihre Geschwindigkeit, zu diesen drey Umständen bey der Last, wie die Kraft zur Last, oder auch umgekehrt, wie die Last zur Kraft; und sind also auf beyden Seiten diese drey Umstände gleich.

Beweis.

Man setze, daß an der Rolle, *a*, (*Fig.* 54.) die Gewichte, *K* und *L*, einerley Schwere haben; so halten sie mit einander das Gleichgewicht. (§. 233.) Ein kleiner Zusatz nun bey dem Gewichte, *K*, welches hier, als Kraft, das andre, *L*, als Last aufwärts bewegen soll, wird diese Bewegung bewirken; *K* wird nieder und *L* aufwärts steigen, indem die Rolle sich dreht, und die mathematische Fadenlinie auf ihr sich nach der Seite von *K* hinzieht. Wenn hierauf die Rolle eine volle Wendung um ihren Mittelpunct gemacht hat; so ist offenbar die Linie, *n*, vom Abwicklungspuncte an bis zum Gewicht, *K*, um so viel verlängert worden, als die Peripherie der Rolle, der Länge nach, beträgt, und eben so viel hat die Linie, *m*, an Länge verloren. Der natürliche Weg (§. 154.) der zwey Gewichte bey jeder einzelnen Rollenumdrehung, oder in gleicher Zeit, ist demnach gleich groß; und weil die Gewichte auch gleich sind, so verhält sich der natürliche Weg der Kraft zum Wege dieser Art der Last, wie die Kraft zur Last, oder auch umgekehrt, wie die Last zur Kraft. Eben so verhalten sich die mechanischen Wege beyder Gewichte gegen einander; denn hier sind sie mit den natürlichen einerley. Die letztern nehmlich machen mit den Radien der Rolle, welche in die Abwicklungspuncte fallen, rechte Winkel. (§. 232.) Da nun die erstern auch auf diese Radien bezogen werden müssen, weil einem derselben die Last stets perpendicular genähert, von dem andern aber eben so die Kraft stets entfernt wird (§ 154.); so sind sie mit jenen eben dieselben Linien, und jener Verhältniß kommt ihnen auch zu. (§. 16.)

Zusatz.

Zusatz.

§. 237. Man wird nun selbst leicht bemerken können, daß die Abänderungen, welche in Rücksicht des Gleichgewichts an der Rolle im (§. 234.) als gleichgültig angegeben wurden, dieses eben so in Rücksicht des Verhältnisses der jetzt betrachteten Wege und Geschwindigkeiten sind.

Erklärung.

§. 238. Eine physische Rolle hat man sich zwar überhaupt so vorzustellen, wie die mathematische in (§. 231.) beschrieben worden ist; aber doch mit den nothwendigen Abänderungen, welche die Materie des Holzes oder Metalls, aus dem sie verfertigt wird, und das Seil, das bey ihr anzuwenden ist, mit sich bringt. Alles an ihr wird nun eine Schwere haben, ihre Scheibe sowohl als ihr Bolzen wird nicht ohne Dicke, und das sie bewegende Seil wird nicht ohne mehr oder weniger Starrheit seyn können. Daher werden nun bey ihr Frictionen entstehn müssen, welche die Bewegung erschweren.

Zusätze.

§. 239. Damit das Seil, das über die Rolle gezogen ist, nicht seitwärts über ihre Ränder abgleite, bekommt ihre Peripherie eine ausgerundete Vertiefung umher, in welcher es sicher liegt; und zu ihrer bequemern Aufhängung wird ihr Bolzen, *c*, (*Fig.* 55.) innerhalb den Schenkeln einer sogenannten Hülse, *a b*, befestigt, welche bey *a* mit einem beweglichen Haken, *n*, versehn ist.

§. 240. Die Sätze, welche in den Paragraphen (232, 233, 234, 236, 237.) von der mathematischen Rolle vorgetragen worden sind, bleiben auch bey der physischen wahr; nur daß man bey dieser die Frictionen mit in Erwägung ziehn, und solche, so weit es sich thun läßt, vermindern muß. (§. 173 — §. 189.)

Erklä-

Erklärung.

§. 241. Die bisher betrachtete Rolle, auch wenn sie mathematisch war, erforderte jederzeit beym Gleichgewicht die Kraft so groß als die Last. Will man aber durch sie, mit einer kleinern Kraft als die Last ist, die letztre im Gleichgewicht erhalten oder gar bewegen: so muß die Rolle eine andre Einrichtung bekommen, und heißt dann die Rolle der zweyten Art. Die bisher betrachtete wird, zum Unterschiede von dieser, künftig die Rolle der ersten Art, oder, ohne weitern Zusatz, die Rolle genennt.

Zusätze.

§. 242. Eine mathematische Rolle der zweyten Art kann man sich etwa so vorstellen. Die Rolle selbst sey eine mathematische Zirkelfläche, *a b*, (*Fig.* 56.) die innerhalb einer Hülse, *c d*, (§. 239.) um einen Bolzen, *c*, beweglich ist. Die Theile der Hülse sowohl als den Bolzen denke man ganz mathematisch, und also ohne Schwere. An der Hülse hange ein Gewicht, *L*, als Last; und über die Rollenperipherie sey eine mathematische, biegsame Linie, *e a b f m*, gelegt, welche in *e* von einem festen Puncte gehalten, bey *f* aber um eine mit ihrer Hülse, *h n*, in *h* aufgehangnen mathematischen Rolle der ersten Art, *f m*, gezogen ist, von *m* nach *K* herab hangt und daselbst das Gewicht, *K*, als Kraft trägt. Die Rollenflächen und die Richtungslinien der Gewichte sollen sich in einerley ebenen Fläche, und zwar hier in einer Verticalfläche, befinden. Das Gewicht, *K*, wird nieder zu steigen streben, das Gewicht, *L*, sammt der Rolle, *a b*, an deren Hülse es hängt, gleichfalls. Da aber beyde, vermittelst der Fadenlinie, wie die Figur zeigt, einander entgegen wirken; so müssen sie entweder unter sich das Gleichgewicht halten, oder beyde müssen in Bewegung kommen, eins nieder-, das andre aufwärts. Die Rolle, *a b*, nun ist bey dieser Einrichtung eben die mathematische Rolle der zweyten Art.

Daß

Daß sie aber auch dasjenige, was ihr der vorige Paragraph beylegte, bewirken kann, wird die Folge zeigen.

§. 243. Die Rolle der ersten Art, fm, (*Fig.* 56.) bey gegenwärtiger Betrachtung ist nur etwas Zufälliges, und bloß der leichtern Vorstellung wegen in der Figur angebracht. Man kann sie auch weglassen; anstatt der Schwerkraft im Gewichte, K, aber die Kraft einer Hand setzen, welche bey f die Fadenlinie, bf, selbst eben so stark aufwärts erhält. Will man aber jene Rolle, fm, mit dem Gewichte, K, gebrauchen; so ist es doch nicht nothwendig, daß ihre Fläche und der herabgehende Faden, mK, in einerley Fläche mit der Rolle, ab, sich befinden, wie es die Figur vorstellt: sondern wenn nur der Punct, f, in derselben Fläche bleibt; so darf die Rollenfläche, fm, in eine andre beliebige Verticalfläche gestellt werden, und die Linie, mK, in derselben kann alsdann auch in einem andern Puncte der Peripherie, der über oder unter m liegt, sich abwickeln. Denn dieses alles wird für den Zug der Linie, bf, von b gegen f hin, wie die schon erwiesenen Sätze von der Rolle der ersten Art lehren, gleichgültig seyn.

Lehrsatz.

§. 244. Wenn an einer mathematischen Rolle der zweyten Art, ab, (*Fig.* 56.) die Richtungslinie, ocv, der Last, L, und die Richtungslinie, bf, der Kraft, K, mit der Richtung derjenigen Linie, ae, an welcher die Rolle, ab, von einem festen Puncte, e, getragen wird, parallel sind: so verhält sich, beym Gleichgewicht, die Kraft, K, im engen Verstande, zur Last, L, wie Eins zu Zwey; das ist: die Kraft gleicht dann der Hälfte der Last.

Beweis.

Man betrachte die Rolle der ersten Art (*Fig.* 55.); denke aber sie selbst, ingleichen die Hülse, ab, mit dem Bolzen, c, und den Ringen, n, wie auch die Schnur, die um sie gelegt ist, als mathematisch, und also ohne Schwere

und

und Friction. Die Fläche, worinnen die Scheibe der Rolle sich befindet, sey eine Verticalfläche ihres Mittelpuncts, *c*, und in eben derselben sollen die drey Puncte, *n* und *d* und *e*, liegen, die man sich als Kräfte dreyer Hände denke, deren zwey, *d* und *e*, die Linien, *df* und *eg*, mit gleicher Stärke vertical nieder ziehn, die dritte aber im Punete, *n*, nach der Richtungslinie, *hcn*, welche vertical durch den Mittelpunct, *c*, geht, jenen beyden so stark entgegen wirkt, daß die Rolle an ihrem Orte bleiben muß, die sich auch um ihren Mittelpunct, wegen der gleich groß angenommenen Kräfte, *d* und *e*, nicht wenden kann. (§. 233.) Für diese Lage der Rolle nun kann vermöge (§. 92.) in ihr der horizontale, gleicharmige Hebel der ersten Art, *fg*, angenommen werden, dessen Ruhepunct, *c*, nach der Richtung, *cn*, von der Hand in *n* aufwärts gehalten wird, indeß ihn die zwey gleichen Kräfte, *d* und *e*, in den Puncten, *f* und *g*, niederzuziehn streben. An diesem Hebel, wie man aus (§. 92.) schon weiß, halten die gleichen Kräfte, *d* und *e*, in den gleichen Entfernungen, *cf* und *cg*, gegen einander das Gleichgewicht, der Ruhepunct, *c*, aber strebt, wie sie selbst, vertical nieder mit einer Kraft, die beyden Kräften, *d* und *e*, zusammen genommen gleich ist (§. 96.); die Hand bey *n* also, die ihn in der Richtungslinie, *ch*, seines Niederstrebens zurück hält, muß ebenfalls, wie er niederwärts thut, aufwärts eine Kraft anwenden, die beyden Kräften, *d* und *e*, zusammen gleich ist. Die drey Richtungslinien, *nch* und *fd* und *ge*, sind unter sich, als Verticallinien, parallel. (§. 47. 48.) Nun lasse man die drey Hände sämmtlich mit ihren unveränderten Kräften und in bleibender Lage, sowohl gegen einander selbst als gegen die Rolle, zugleich mit der letztern in voriger Verticalfläche seitwärts herum bewegt werden, so lange bis jeder der drey Puncte, *d* und *n* und *e*, einen halben Zirkel um *c* beschrieben hat, und also das Ganze in die Lage gekommen ist, welche in (*Fig.* 57.) dargestellt wird. Nichts wird bey dieser Wendung geschehn seyn, was die vorigen

Bestim-

Bestimmungen bey dem Gleichgewicht zwischen den Kräften der drey Hände, *d* und *e* und *n*, gegen einander hätte ändern können; noch sind ihre drey Richtungslinien vertical und also unter sich parallel; noch wirken die Kräfte der Hände in *d* und *e* (*Fig.* 57.) einander gleich, und beyde zusammen soviel, als die Kraft der dritten Hand in *n* allein. Die letzte Kraft, *n*, verwandle man in ein Gewicht, *m*, dessen Schwere ihr gleicht. Dieses wird in eben der verticalen Richtung, *h c n*, nach welcher die Hand wirkte, seine Wirkung fortsetzen. Anstatt der Hand in *e* setze man einen festen Punct, der nach Art eines Nagels die Linie, *e g*, trägt; die dritte Hand, *d*, lasse man wie vorhin in ihrer Wirkung bleiben. Das Gleichgewicht an der Rolle besteht immer noch, indem der feste Punct, *e*, eben so viel vom Gewicht, *m*, aufhält, als die Hand, *d*, davon trägt. Die Hand trägt also nur das halbe Gewicht. Demnach verhält sich bey dem Gleichgewicht an der Rolle von der zweyten Art die Kraft, *d*, im engen Verstande, zur Last, *m*, wie die Hälfte zum Ganzen, oder wie Eins zu Zwey; das ist, die Kraft ist nur halb so groß, als die Last.

Zusätze.

§. 245. Wie bey der Rolle der ersten Art (*Fig.* 55.) ein geradliniger, gleicharmiger Hebel der ersten Art, *f c g*, zum Grunde lag (§. 92.); so liegt der gegenwärtigen Rolle der zweyten Art (*Fig.* 57.) offenbar auch ein Hebel der zweyten Art, *g c f*, zum Grunde. Denn der Punct, *g*, am Faden, *g e*, der vom festen Puncte, *e*, getragen wird, kann als Ruhepunct gedacht werden. In *c* zieht die Last, *m*, den Hebel niederwärts, in *f* hält die Kraft, *d*, ihn aufwärts, und wirkt hiermit jener entgegen. Nun ist der Winkel, *d f c*, ein rechter, weil ihn ein Radius, *c f*, an der Tangente, *d f*, macht (G. §. 361.), und der Winkel, *c*, ist auch ein rechter, wegen der Parallelen, *d f* und *h c*, (G. §. 375.). Demnach ist an diesem Hebel, *g c f*, der Radius, *g c*, die Entfernung der Last, *m*; und der Diameter, *g f*, ist die Entfernung der Kraft, *d*; daher verhält sich, beym Gleich-

gewicht an ihm, die Kraft, *d*, zur Last, *m*, wie der Radius, *gc*, zum Diameter, *gf*, das ist, wie Eins zu Zwey. So folgt auch aus dieser Betrachtung das bereits vorhin erwiesene Gesetz dieser Rolle der zweyten Art.

§. 246. Bey der Wendung, welche im (§. 244.) die drey dort geschäftigen Hände mit der Rolle durch einen Halbzirkel vornahmen, ließ sich leicht bemerken, daß an ihr das Gleichgewicht ohne Aussetzung blieb, die drey Wirkungslinien der Hände mochten auch nach und nach aus der zuerst verticalen Richtung in eine noch so schräge kommen, wenn sie nur unter sich parallel blieben. Hieraus folgt dann, daß das erwiesene Gesetz vom Gleichgewicht an der Rolle von der zweyten Art unabänderlich bleibt, wenn auch die Richtungslinien der Kräfte nicht eben vertical sind.

Lehrsatz.

§. 247. Wenn an der mathematischen Rolle der zweyten Art (*Fig.* 60.) die Richtungen der Linien, *av* und *ew*, von denen sie getragen wird, mit der Richtungslinie, *cu*, der Last, *p*, nicht parallel sind, sondern gegen sie convergiren, und zwar beyde gleich stark: so beträgt, beym Gleichgewichte, die Kraft, *e*, im engen Verstande, nicht ferner nur die Hälfte der Last, sondern mehr; und eben so viel hat dann der feste Punct, *a*, der die Rolle tragen hilft, zu erhalten.

Beweis.

Man denke eine horizontale Linie, *ae*, (*Fig.* 60.) und eine verticale, durch einen ihrer Puncte, *c*, geführt, *cu*. In der verticalen Ebene, worinnen beyde Linien sich befinden, liege die Rollenfläche, und ihr Mittelpunct, *o*, sey in der Verticallinie, *cu*; so wird in eben dieselbe der Mittelpunct der Schwere des Gewichts, *p*, fallen. In den Puncten, *b* und *d*, denke man Anfangs die Rolle, wie vorhin in (§. 244.) von den parallelen Verticallinien, *bn*, und *dm*, getragen; so wird der Diameter zwischen den

Ab-

Abwicklungspuncten wieder wie dort horizontal liegen, und in jedem der beyden Puncte, *b* und *d*, wird bey dem Gleichgewicht die Hälfte der Last, *p*, gehalten. Auf beyden Seiten der Verticallinie, *cu*, ist jetzt offenbar, der Figur nach, alles gleich. Nun rücke man den Punct, *b*, der die eine Haltungslinie, *bn*, der Rolle trägt, in der Horizontallinie, *ae*, bis *a* fort, daß die ihm zugehörige Linie in die Lage, *av*, kommt; zu gleicher Zeit führe man den Punct, *d*, eben so weit bis *e*, daß die zweyte Haltungslinie der Rolle, *dm*, die Lage, *ew*, erlangt. Durch diese Veränderung wird die Rolle nach keiner Seite aus der Verticallinie, *cu*, gezogen werden, indem beyderseits einerley geschieht. Die vorigen Abwicklungspuncte, *n* und *m*, werden in *v* und *w* gleich tief unter den horizontalen Diameter, *nm*, eben wegen Gleichheit der Umstände auf beyden Seiten, herabrücken; die Chorde, *vw*, wird folglich parallel mit *nm*, und also auch horizontal seyn. Durch sie geht deswegen die Verticallinie, *cu*, des Gewichts, *p*, bey *u* unter rechten Winkeln, und halbirt sie daselbst. (G. §. 399.) Da nun immer noch auf beyden Seiten der Verticallinie, *cu*, die Umstände gleich geblieben sind; so wird auch die Last, *p*, gewiß noch in den Puncten, *a* und *e* von Kräften getragen, die einander gleich sind, wie sie dieses in *b* und *d* waren. Daß aber ihre Stärke für das Gleichgewicht mit *p* unverändert geblieben sey, folgt nicht; denn in Rücksicht dieser ist ein wichtiger Umstand verändert, von dem man schon aus der Hebellehre weiß, daß er auf sie besondern Einfluß hat. Die Puncte, *b* und *d*, nehmlich setzten ihre Wirkung dem Gewichte, *p*, gerade entgegen; aber in *a* und *e* verrückt, wirken sie gegen dasselbe nach schrägen Richtungen. Man bemerke in der Rolle den Winkelhebel, *owv*. Sein Ruhepunct werde in *w* angenommen, wo ihn der feste Punct, *e*, erhält. Am Ende, *o*, des einen Arms, *wo*, zieht die Last, *p*, nieder, unter der Entfernung, *wu*. Am Ende, *v*, des andern Arms, *wv*, hält eine Hand in *a* aufwärts, unter der Entfernung, *wy*. Beym Gleichgewicht

nun verhält sich die Kraft in *a* zur Last, *p*, wie *w u* zu *w y*. Es ist aber *w u* schon als die Hälfte der Chorde, *w v*, bekannt; und in dem bey *y* rechtwinkligen Triangel, *y w v*, ist *w y* kleiner als die Hypotenuse, das ist, kleiner als die Chorde, *w v*; also ist *w u* mehr als die Hälfte von *w y*. Die Kraft in *a* verhält sich folglich zur Last, *p*, wie Eins zu weniger als Zwey; das heißt: sie beträgt wenigstens mehr, als die Hälfte der Last. Daß der feste Punct, *e*, der die Rolle tragen hilft, auch mehr als die Hälfte der Last zu erhalten habe, ist klar; weil schon erwiesen ist, daß er mit *a* gleich viel trägt.

Zusätze.

§. 248. Die Linien, *a v* und *e w*, (*Fig.* 60.) convergirten jetzt gegen die Richtungslinie, *c u*, der Last, *p*, gleichstark herabwärts. Will man es so einrichten, daß beyde gleichstark gegen eben diese Linie aufwärts convergiren; so wird man nun von selbst, wenn nur der gezeigte Weg wieder befolgt wird, beweisen können, daß auch dann jeder der zwey Puncte, welche die Rolle tragen, beym Gleichgewicht zwar wieder gleich viel Kraft anwenden müsse, jeder aber auch für sich wieder mehr nöthig habe, als das halbe Gewicht der Last beträgt.

§. 249. Der Ausdruck, im Lehrsatze (§. 247): mehr als die Hälfte der Last, und der Ausdruck am Ende des dort geführten Beweises: wenigstens mehr als die Hälfte der Last, sind beyde nicht ganz bestimmt. Denn, mehr als die Hälfte der Last, kann entweder heißen: mehr als die Hälfte, aber doch noch nicht die ganze Last; oder es kann heißen: die Last ganz; oder endlich auch: mehr als die ganze Last. In den beyden letzten Ausdrücken nehmlich wird noch immer mehr als die Hälfte der Last angedeutet. Jener Ausdruck aber ward in dem angeführten Lehrsatze mit Bedacht dreydeutig gewählt; weil wirklich, nachdem die Umstände der Rolle beschaffen sind, sein dreyfacher Verstand bey ihr anwendbar ist. Beträgt nehmlich ein jeder der zwey Bogen,

mw und *nv*, (*Fig.* 60.), der zwischen der Chorde, *vw*, welche die Abwicklungspuncte, *v* und *w*, verbindet, und dem mit ihr parallelen Diameter, *nm*, enthalten ist, genau sechzig Grad: so ist die Kraft in *a*, beym Gleichgewicht, der ganzen Last, *p*, gleich. Im Fall aber ein jeder von jenen Bogen weniger als sechzig Grad beträgt; so gleicht die Kraft in *a* noch nicht der ganzen Last, aber doch mehr als ihrer Hälfte. Beträgt endlich jeder der beyden Bogen mehr als sechzig Grad; so muß die Kraft in *a* größer seyn, als die Last selbst. Was von *a* gesagt ward, gilt in den angezeigten drey Fällen auch vom Puncte, *e*, der die Rolle mit tragen hilft.

Die Behauptung für den ersten dieser drey Fälle zu rechtfertigen, ist, ihm gemäß, in (*Fig.* 58.) die untere Hälfte der Rolle mit den Richtungen, *av* und *ew* und *op*, der drey an ihr beym Gleichgewicht gegen einander wirkenden Kräfte, *a* und *e* und *p*, besonders gezeichnet worden. Der Diameter, *nm*, sey noch horizontal; der Bogen, *nv*, aber sowohl als der Bogen, *mw*, betrage sechzig Grad. Die Chorde, *vw*, zwischen den Abwicklungspuncten, *v* und *w*, ist noch wie vorhin mit *nm* parallel. Man betrachte nun den Winkelhebel, *owv*. Sein Ruhepunct sey in *w*. Der eine Arm, *wo*, trägt in *o* die Last, *p*, unter der Entfernung, *wu*, welche wieder, wie vorhin, die Hälfte der Chorde, *wv*, ist. Der andre Arm, *wv*, wird in *v* von der Kraft in *a* aufwärts gehalten, unter der Entfernung, *wy*. Daher ist beym Gleichgewicht

$$a : p = wu : wy$$

Aber *wu* und *wy* lassen sich gleich groß erweisen. Denn der Triangel, *ovw*, ist gleichseitig; indem *ov* und *ow* Radien sind, und *vw* als Chorde von sechzig Grad auch dem Radius gleichet. Daher ist der Winkel, *ovw*, sowohl als der Winkel, *owv*, sechzig Grad. Die Winkel, *ovq* und *owq*, sind rechte, weil Radien auf Tangenten sie bilden; nimmt man von jedem den als sechzig Grad groß erwiesenen Triangelwinkel weg, so muß jeder Rest

dreyßig

dreyßig Grad betragen. Demnach enthält jeder von den zwey Winkeln, uvq und uwq, dreyßig Grad. In den bey u rechtwinkligen Triangeln, vuq und wuq, müssen nun auf den Winkel, uqv, sechzig Grad kommen, und eben so viel auf uqw. Ein halber Zirkel ist das Maß von den drey Winkeln, vqu und uqw und wqy; die ersten zwey betrugen zusammen hundert und zwanzig Grad; so bleiben für wqy sechzig Grad übrig. Ferner lassen sich die beyden Triangel, uwq und wqy, gleich und ähnlich erweisen. Denn sie haben eine Seite, qw, gemein; u und y in ihnen sind rechte Winkel, bey q sind ihre Winkel als gleich eben jetzt erwiesen, und ihre dritten bey w sind also auch gleich. (G. §. 345.) Demnach sind die Linien, wu und wy, gleichgroß. (G. §. 348.) Ist aber dieses, so sind in der vorhin schon gefundnen Proportion

$$a : p = wu : wy$$

die zwey Glieder des ersten Verhältnisses, a und p, sich gleich. Das heißt: die Kraft in a ist so groß, als die Last in p; und eben so viel hält der Punct, e.

§. 250. Der Umstand, daß (*Fig.* 58.) die Perpendiculare, wy, gleich war der Perpendiculare, wu, beruhte, wie man im Beweise sah, auf der Voraussetzung, daß sowohl der Bogen, mw, als auch der Bogen, nv, sechzig Grade betrug. Nur dann also ist, beym Gleichgewicht, die Kraft in a, oder in e, der Last, p, gleich. Ist jener Bogen kleiner als sechzig Grad, wie dieses der Fall in (*Fig.* 60.) mit mw war; so fällt wy größer als wu aus, doch so, daß wy noch nicht das Doppelte von wu ist: und dann ist die Kraft in a oder e noch nicht der ganzen Last gleich, aber doch größer, als die Hälfte derselben. (§. 247.) Wenn endlich der Bogen, mw, sowohl als nv, (*Fig.* 58.) größer wird, als sechzig Grad, so wird hiermit wy kleiner als wu, und dann wird, beym Gleichgewicht, in a oder e eine Kraft erfordert, die größer als die ganze Last, p, ist. Für diesen letzten Fall ist hier keine Zeichnung entworfen; denn ihr Entwurf kann nun keinem schwer seyn.

§. 251.

§. 251. Convergiren die Linien, *av* und *ew*. (*Fig.* 60.) gegen die Linie, *cp*, nicht abwärts, wie es die Zeichnung vorstellt, sondern aufwärts; und liegen dem gemäß die Chorden zwischen den Abwicklungspuncten mit dem Diameter, *nm*, dann in der obern Hälfte der Rolle parallel: so werden die Fälle in Rücksicht der Bogen von 60 Graden sowohl, als auch derer, die weniger oder mehr Grade haben, sich eben so erklären lassen, wie es jetzt im untern Theile der Rolle geschehen ist.

§. 252. So lange die Rolle der zweyten Art (*Fig.* 60.) mit der Last, *p*, in der mathematischen Fadenlinie, *avwe*, frey hin und wieder laufen kann, so lange wird sie auch jederzeit sich so stellen, daß die Winkel, *ewv* und *avw*, an der Chorde zwischen den Abwicklungspuncten, *w* und *v*, gleich groß sind, die Kräfte aber in *a* und *e* gleich viel zu tragen haben (§. 247.); und zwar jede von ihnen die Hälfte der Last, im Fall die Chorde zugleich Diameter ist (*Fig.* 57.); sonst aber wenigstens mehr als die Hälfte der Last (*Fig.* 60. und *Fig.* 58.); doch in keinem Falle weniger, als diese Hälfte. Hingegen, wenn man es durch ein künstliches Mittel dahin bringt, daß die angeführten Winkel ungleich groß ausfallen; so werden auch die Puncte, *a* und *e*, (*Fig.* 60.), beym Gleichgewicht, ungleich viel zu tragen bekommen: und dann kann es allerdings geschehn, daß der eine weniger zu tragen hat, als die Hälfte der Last. Man sehe (*Fig.* 59.) und lege die Rolle mit dem Gewichte, *m*, in die mathematische Fadenlinie, *egbfd*, die Anfangs in *e* und *d* gehalten wird, so daß die drey Richtungslinien, *eg* und *hm* und *df*, parallel sind. Die Winkel, *egf* und *dfg*, werden gleich groß und zwar rechte seyn; die Chorde, an welcher sie liegen, *gf*, ist zugleich Diameter. Jeder von den Puncten, *e* und *d*, wird gleichviel, nehmlich die Hälfte der Last, *m*, erhalten müssen. (§. 244.) Nun verrücke man den Punct, *d*, in *D*, daß die Linie, *df*, in die Lage, *Dp*, kommt: so wird die Rolle nicht ruhig bleiben, weil die Umstände auf

beyden

beyden Seiten nicht mehr gleich sind (§. 247.); sondern wird, bis sie es wieder werden, nach der Seite, D, hin, in der biegsamen Linie fortlaufen wollen. Diesen Fortlauf aber verhindre man durch eine in f entgegen gestellte feste Linie, dfw, und bringe dann an der nun stilliegenden Rolle das Gleichgewicht zu Stande. Es wird sich erweisen lassen, daß jetzt D und e ungleich stark halten, und zwar D mit mehr Kraft, als die halbe Last, m, beträgt, e aber mit einer Kraft, die geringer als die halbe Last ist. Man betrachte in dieser Absicht den Winkelhebel, cgp. In g sey der Ruhepunct; in c hängt die Last, m, unter der Entfernung, gc; in p hält die Kraft, D, aufwärts, unter der Entfernung, gv. Es verhält sich, beym Gleichgewicht,

$$D : m = gc : gv$$

Aber gc, welches von gf die Hälfte ist, muß von gp mehr als die Hälfte seyn; weil gf im Triangel, gpf, der bey p einen rechten Winkel, nehmlich einen Winkel im Halbzirkel, hat, Hypotenuse ist. Beträgt nun gc von gp mehr, als die Hälfte; so muß es gewiß auch mehr als die Hälfte von gv betragen. Denn gv ist in dem bey v rechtwinkligen Triangel, gvp, kleiner, als dessen Hypotenuse, gp. Vorhin verhielt sich D zu m, wie gc zu gv; und nun ist bewiesen, daß gc mehr ist, als die Hälfte von gv: so ist demnach auch die Kraft in D größer, als die Hälfte der Last, m. Um nun ferner das Vermögen der Kraft in e zu erkennen, betrachte man den Winkelhebel, cpg. Sein Ruhepunct ist in p. Sein einer Arm, pc, trägt in c die Last, m, unter der Entfernung, po; sein andrer Arm, pg, wird in g von der Kraft, e, aufwärts gehalten, unter der Entfernung, pa. Demnach verhält sich, beym Gleichgewicht,

$$e : m = po : pa$$

Aber, po, ist die Hälfte der Chorde, pb, (S. §. 399.), welche nur ein Theil der Linie, pa, ist. Also ist po von pa weniger, als die Hälfte; und dem gemäß muß

die

die Kraft, *e*, auch weniger als die Hälfte von der Last, *m*, betragen. Wird endlich das, was von den Kräften in *D* und *e* erwiesen ist, mit einander verglichen; so erhellet, daß sie nicht mit gleicher Stärke die Rolle tragen.

§. 253. Bisher hat man die Wahrheiten von der mathematischen Rolle der zweyten Art immer so betrachtet, daß die Richtungslinie der Last, *p*, (*Fig.* 60.) vertical war, und die Zeichnung des Kupferstichs in einer Verticalfläche sich befand. Allein es beruhte auf diesen beyden Umständen nicht die Hauptsache dessen, was gefunden ward. Man halte die Fläche des Papiers, worauf z. E. die Zeichnung in (*Fig.* 60.) entworfen ist, in welche schiefe Richtung man will, auch sogar in die horizontale; so wird immer alles Erwiesene wahr bleiben. Nur muß dann freylich der Zug des Gewichts, *p*, über eine Rolle der ersten Art geleitet gedacht werden, vermöge welcher er der gewählten Flächenlage gemäß wirken kann; oder man muß anstatt des Gewichts eine eben so starke Kraft anderer Art, etwa eine Hand, wählen, die für sich schon fähig ist, nach jeder beliebigen Richtung zu wirken.

§. 254. Wenn von der freywirkenden (§. 252.) mathematischen Rolle der zweyten Art gefordert wird, daß sie der Kraft, in enger Bedeutung, nicht nur im Ruhestande den möglichgrößten Vortheil gewähren, sondern ihr auch denselben unverändert fort erhalten soll, wenn Kraft und Last in Bewegung versetzt werden: so muß sie die Einrichtung haben, bey welcher die Richtungslinien der drey an ihr wirkenden Kräfte, im weiten Verstande, unter sich parallel sind; wie es in (*Fig.* 56 oder 57) vorgestellt ist. Denn da wird, beym Gleichgewicht, die Kraft, im engen Verstande, sich zur Last verhalten, wie Eins zu Zwey. (§. 244.) Wird ferner der ziehenden Kraft ein kleiner Zusatz gegeben, daß sie die Rolle mit der Last wirklich bewegen kann; so wird auch dasselbe Verhältniß immer fort dauern: denn die Winkel, *f b c* und *e a c*, (*Fig.* 56.) am Diameter, *a b*, nebst den übrigen Hauptumständen, bleiben immer dieselben,

selben, wenn durch den Zug der Kraft, *K*, die Rolle, *a d b*, innerhalb der Parallelen, *e a* und *f b*, aufsteigt. Anders ist es, wenn jene drey Richtungslinien in der erweiterten Rollenfläche unter sich nicht parallel sind; wie es, z. B. in (*Fig.* 60.) vorgestellt wird. Denn da wirkt die Kraft, *e*, im engen Verstande, schon, wenn die Rolle noch in Ruhe ist, weniger vortheilhaft, weil sie sich nun zur Last, *p*, verhält wie Eins zu weniger als Zwey (§. 247.); und sobald sie durch einen Zusatz etwas verstärkt wird, daß die Rolle mit der Last in Bewegung kommt, so kann das Verhältniß zwischen Kraft und Last nicht dasselbe bleiben, sondern die erstre wird mit jedem Augenblicke verstärkt werden müssen, indem die Winkel, *e w u* und *a v u*, an der Chorde, *v w*, sich stets vergrößern, und auf tiefer liegende Chorden übergehn (§. 249).

Lehrsatz.

§. 255. Wenn bey einer mathematischen Rolle der zweyten Art, an welcher die drey Kräfte nach parallelen Richtungen wirken, durch einen kleinen Zusatz bey der Kraft, im engen Verstande, das Gleichgewicht gehoben und die Rolle selbst hiermit in Bewegung gesetzt wird: so verhält sich, in gleicher Zeit, der natürliche Weg der Kraft zum natürlichen Wege der Last, wie Zwey zu Eins', oder wie die Last zur Kraft beym Gleichgewicht. Und eben so verhalten sich ihre mechanischen Wege, ingleichen ihre Geschwindigkeiten.

Beweis.

Man nehme die Rolle der zweyten Art, in (*Fig.* 57.), vor sich, an welcher die Richtungen der drey Kräfte einander parallel sind. In *d* denke man die aufwärts ziehende Hand, in *e* aber den festen Punct, der die Rolle tragen hilft. Wenn durch einen kleinen Zusatz bey der Kraft in *d* die Bewegung wirklich erfolgt; so steigt der Mittelpunct der Schwere des Gewichts, *m*, in der Linie, *m h*, auf, und

die

die Kraft, *d*, in der fortgesetzten Linie, *fd*. Der natürliche Weg der Last ist also stets ein Theil von *mh*, und der natürliche Weg der Kraft ein Theil von *fd*. Beyde Linien nehmlich, *mh* und *fd*, werden, so weit man will, über *h* und *d* hinaus verlängert gedacht. Wird nun die Last in einer gewissen Zeit durch einen rheinländischen Fuß der Linie, *mh*, gehoben; so muß sich, in eben dieser Zeit, jede von den zwey Linien, *ge* nnd *fd*, um einen rheinländischen Fuß, vom Diameter, *gf*, herauf gerechnet, verkürzen. Diese zwey Fuß der mathematischen Fadenlinie wird also die Kraft, *d*, hinauf gezogen haben, und hiermit selbst zwey Fuß aufgerückt seyn. In einer bestimmten Zeit demnach verhält sich ihr natürlicher Weg zum natürlichen Wege der Last, wie zwey Fuß zu einem Fuß, das ist, wie Zwey zu Eins, oder wie die Last zur Kraft. (§. 244.) Die Geschwindigkeiten beyder müssen gegen einander eben dieses Verhältniß haben, weil ihre Wege in gleicher Zeit zurückgelegt werden. (§. 16.) Um die mechanischen Wege beurtheilen zu können, ziehe man durch die Richtungslinie, *mh*, der Last, *m*, unter ihr in der erweiterten Rollenfläche eine gerade Linie, *pu*, rechtwinklig, welche zugleich durch die unterwärts verlängerte Parallele, *df*, rechtwinklig liegen wird. (G. §. 375.) Da nun von der Linie, *pu*, die Last und die Kraft, sobald Bewegung erfolgt, sich perpendicular entfernen; so sind die mechanischen Wege von beyden stets Theile dieser Linien, in welchen auch die natürlichen Wege lagen. Es sind also hier die mechanischen Wege mit den natürlichen einerley (§. 154.), und haben also auch das Verhältniß unter sich, das von jenen bereits erwiesen ist.

Zusatz.

§. 256. Wenn bey der Rolle der zweyten Art, welche eine Last vermittelst der Kraft eines Gewichts heben soll, die Einrichtung so, wie sie in (*Fig.* 56.) dargestellt wird, getroffen ist, daß nehmlich die Kraft, *K*, mit der Zuglinie

über

über eine Rolle der ersten Art, fnm, geschlagen, bey Aufhebung der Last, L, niederwärts steigen muß; so bleibt das Verhältniß der natürlichen und mechanischen Wege sowohl als der Geschwindigkeiten bey Kraft und Last eben dasselbe, welches im vorigen Paragraph erklärt worden ist. Daß dieses von den natürlichen Wegen und Geschwindigkeiten noch gilt, wird jeder von selbst leicht gewahr werden. Bey Betrachtung der mechanischen Wege aber ist zu bemerken, daß man sich in Absicht der Last zwar die Sache auch hier wie im vorigen Paragraph zu denken hat, daß aber in Absicht der Kraft ihr mechanischer Weg auf den Diameter, fm, der Rolle, fnm, nun zu beziehen ist, auf welchem die Linie, mK, in der die Kraft niedersteigt, perpendicular steht. Nun erhellt sogleich, daß auch hier der Kraft mechanischer Weg mit ihrem natürlichen überein kommt, wie es im Falle des vorigen Paragraphen war, und er also auch jenes Verhältniß zum mechanischen Wege der Last hier noch behalten muß.

Erklärung.

§. 257. Wenn eine mathematische Rollenhülse, af, (*Fig.* 61) mehr als eine Rolle in sich faßt, wird sie eine Flasche genennt. Man kann Flaschen denken, die lauter Rollen der ersten Art in sich fassen, af, und andre, die lauter Rollen der zweyten Art enthalten, hp. Wenn eine von jenen Flaschen, af, mit einer von diesen, hp, durch eine biegsame, mathematische Linie, $gbcnif$, so in Verbindung gesetzt wird, daß vermöge derselben eine Kraft, g, die eine Last, p, bewegen soll, beträchtlich verstärkt wird; so nennt man eine solche Zusammenordnung von Flaschen einen Flaschenzug oder Polyspast, ap.

Zusatz.

§. 258. In (*Fig.* 61.) stelle man sich einen mathematischen Flaschenzug auf folgende Art vor. Die Flasche, af, ist bey a in der Höhe irgendwo unverrücklich, und

zwar

zwar hier vertical, befestigt. Ihre zwey Rollen sind demnach von der ersten Art. Die andre Flasche, hp, wird vermittelst einer mathematischen biegsamen Linie, die bey f befestigt, und dann um eine Rolle nach der andern, in beyden Flaschen immer abwechselnd, wie es die Figur zeigt, herumgeführt ist, mit der ersten in Verbindung gesetzt. Wenn nun an der untersten Flasche, hp, ein Gewicht, p, als Last hängt, und am freyen Ende der biegsamen Linie ein anderes, g, als Kraft wirkt: so wird entweder zwischen beyden das Gleichgewicht Statt finden; oder wenn g mehr vermag als p, so wird g niedersteigen, die Rollen insgesammt werden umzulaufen genöthigt seyn, und die Last, p, wenn die ganze Anordnung vertical getroffen ist, wird, sammt der ihr zugehörigen Flasche, empor gehoben werden. Diese untre Flasche, hp, enthält also bewegliche Rollen, deren hier zwey sind. Diese Angabe von zwey Rollen in jeder Flasche ist übrigens willkührlich; es könnten derselben auch mehrere angenommen seyn. Endlich sind in der Figur die Diameter der vier Rollen so gegen einander proportionirt, daß die herabgehenden Zuglinien, cn und ek, und so ferner, unter sich parallel liegen. Auch mit der Verticallinie, hp, der Last, p, sind sie parallel, und also sämmtlich vertical.

Lehrsatz.

§. 259. Wenn am mathematischen Flaschenzuge die Zuglinien, welche von der Last vermittelst der Flasche mit den Rollen der zweyten Art unmittelbar angestrengt werden, unter sich und mit der Richtungslinie der Last parallel sind: so verhält sich, beym Gleichgewicht, die Kraft zur Last wie Eins zur Anzahl jener Zuglinien.

Beweis.

Dasjenige, was in diesem Lehrsatze vorausgesetzt wird, findet bey dem mathematischen Flaschenzuge Statt, welcher in (*Fig.* 61.) vorgestellt ist; wie man dieses mit Zunahme

des

des vorigen Paragraphen leicht erkennen kann. Nun ist die Verticallinie, *cn*, Tangente an der tiefsten Rolle im Puncte, *n*, des Radius, *vn*. Bey *n* muß also ein rechter Winkel, und *vn* muß, eben weil *cn* vertical ist, horizontal seyn. Eben so macht die verticale Tangente, *dm*, im Puncte, *m*, mit dem Radius, *vm*, einen rechten Winkel, und *vm* ist horizontal. Daher ist *mn* der horizontale Diameter der untersten Rolle. Eben so läßt sich erweisen, daß, *ik*, zwischen den Berührungspuncten, *i* und *k*, der verticalen Tangenten, *fi* und *ek*, der horizontale Diameter der zweyten Rolle, von unten herauf, ist. Die zuletzt genannten zwey Tangenten denke man von *i* bis *o*, und von *k* bis *w* verlängert; so wird ihr Zug in *o* und *w* am Diameter, *mn*, so stark aufwärts seyn müssen, als er es in *i* und *k* am Diameter, *ik*, war. Es erscheint sogleich ein Hebel der ersten Art, *mvn*, an welchem in *v* der Ruhepunct gedacht werde. An diesem Hebel halten vier Kräfte in den Puncten, *m* und *o* und *w* und *n*, aufwärts, und zwar unter rechten Winkeln, indem vier Verticallinien eine Horizontale fassen. Diesen vier Kräften sollte nun über dem Ruhepuncte, *v*, eine Widerlage entgegen gestellt seyn, die vertical aufwärts einen Druck aushalten könnte, der ihnen zusammen genommen gleich wär; denn diese Widerlage allein setzte sich ihnen allen gerade entgegen. (§. 88.) Anstatt dieser Widerlage aber denke man, wie dieses in dem jetzt angeführten Paragraph vorgestellt ward, die mathematische Linie, *vp*, welche vertical herabwärts den Ruhepunct, *v*, so stark nieder hält, als die Widerlage über ihm es thun müßte. Dieses geschieht, wenn *vp* mit einem so starken Gewichte beschwert wird, als die vier aufziehenden Kräfte zusammen betragen. Dieses Gewicht sey *p*. Man setze, daß jene vier Kräfte zusammen acht Pfund wirken; so muß *p* acht Pfund schwer seyn. Man nehme hierauf in Gedanken Anfangs am Hebel, *mn*, die beyden, ihn aufwärts haltenden Linien, *of* und *we*, weg; so wird, beym Gleichgewicht an ihm, von *m* d

vier Pfund und von *n c* auch vier Pfund zu erhalten seyn, von jeder Linie nehmlich die Hälfte des Gewichts, *p*; weil die Entfernungen, *v m* und *v n*, als Radien, gleich sind. Dann lasse man in *o* und *w*, am Hebel, *m n*, die Linien, *o f* und *w e*, wieder wirken, nehme hingegen dafür die Zuglinien in *m* und *n* weg: so wird, beym Gleichgewicht, der Punct, *o*, vier Pfund, und der Punct, *w*, vier Pfund, nehmlich wieder jeder gleichviel von dem achtpfündigen, *p*, zu tragen haben; weil die Entfernungen, *v o* und *v w*, gleich sind. Jede gleicht ja einem Radius der Rolle, *i k*, mit dem sie, perpendicular, wie er selbst, zwischen Parallelen, *i o* und *k w*, steht. Es wirken demnach die vier Zuglinien in *m*, *o*, *w*, *n* sämmtlich gleich stark gegen das Gewicht, *p*. Man lasse sie nun alle vier wieder zusammen wirken; so kann auf jede freylich nicht mehr vier Pfund, als die Hälfte von *p*, aber von demselben muß doch noch auf jede gleich viel, das ist ein Viertel von acht Pfund, oder zwey Pfund fallen. Läßt man die Verlängerungslinien, *k w* und *i o*, endlich wieder verschwinden; so wird der Punct, *k*, an der Rolle, *i k*, noch von zwey Pfund aufwärts gehalten, und von eben so viel der Punct, *i*. Die Linie, *n c*, hatte, wenn die Last, *p*, nicht sinken sollte, ein Viertel von ihr, oder zwey Pfund, zu halten: darum muß das Gegengewicht, *g*, damit die oberste Rolle der ersten Art, *b c*, in Ruhe bleibt, mit zwey Pfund an der Linie, *b g*, niederziehen (§. 233.); das heißt: es muß *g*, als die Kraft im engen Verstande, an diesem Flaschenzuge zwey Pfund schwer gewählet werden; dann wird an ihm das Gleichgewicht bestehen. Bey demselben verhält sich demnach die Kraft, *g*, zur Last, *p*, wie zwey Pfund zu acht Pfund, oder wie Zwey zu Acht, das ist, wie Eins zu Vier. Und da auf jede Linie, die von der Flasche, an welcher die Last hangt, unmittelbar angestrengt wird, eben so viel als auf die Kraft, *g*, kommt; so kann man auch sagen: Am Flaschenzuge verhält sich die Kraft

zur

zur Last, wie Eins zu der Anzahl der von der Last angestrengten Linien.

Zusätze.

§. 260. Daß die Linie, *b g*, (*Fig.* 61.) an welcher die Kraft, *g*, wirkt, gegen die vier von der Last angestrengten Parallellinien selbst auch eine parallele Lage habe, ist nicht nothwendig; ob es wohl in der Figur, weil zur Kraft ein Gewicht gewählt ward, so zutrifft. Denn da die Rolle, *b c*, über welche die Zuglinie der Kraft zunächst weggeführt ist, zu den Rollen der ersten Art gehört; so würde die Kraft an ihrer Wirkung auch nichts verlieren, wenn, im Fall sie in einer Hand gedacht würde, ihr Zug zwar in der Ebene der vier Linien, aber doch dabey schräg gegen dieselben geleitet wär. (§. 234.) Nun lasse man jene vier Linien unter sich und mit der Richtungslinie der Last parallel bleiben; denn sonst würde, wegen der Rollen der zweyten Art, in der Flasche, welche die Last trägt, die Kraft an ihrem Vermögen verlieren. (§. 247.)

§. 261. Was in (§. 246.) von der Rolle der zweyten Art bemerkt ward, das ist auch auf den Flaschenzug anzuwenden. Auch bey ihm kommt nichts darauf an, daß die Lage der nöthigen parallelen Zuglinien eben vertical sey: auch bey ihrer schrägen Lage bleibt das gefundne Gesetz des Gleichgewichts; nur parallel müssen sie erhalten werden.

§. 262. In (*Fig.* 61.) war die mathematische Fadenlinie an der obern Flasche in *f* befestigt; der Flaschenzug aber hätte auch so angeordnet werden können, daß ihre Befestigung an der untern bey *h* geschehen, und doch die parallele Lage der von der Last angestrengten Linien unter sich und gegen die Richtungslinie der Last erhalten worden wär. Wenn man aber dem gemäß sich die Zeichnung, die nun nicht schwer seyn kann, entwerfen will; so wird man finden, daß dann in der obern Flasche noch eine Rolle

hinzu-

hinzukommen muß, wofern man wieder wie vorhin den Zug der Kraft niederwärts verlangt. Es werden dann fünf Linien von der Last angestrengt werden, und die Kraft wird nur ein Fünftel der Last seyn dürfen.

§. 263. Ueberhaupt wird man bey Zeichnungen von Flaschenzügen mit noch mehrern Rollen leicht wahrnehmen, daß die Anzahl der Rollen in beyden mit einander verbundnen Flaschen zusammen jedes Mahl so groß ist, als die Anzahl der von der Last angestrengten Linien. Deswegen kann man auch anstatt der Zahl, die den letztern zukommt, bey Ausspechung des Gesetzes vom Gleichgewicht am Flaschenzuge, die Zahl der sämmtlichen Rollen nennen, und sagen: die Kraft verhält sich zur Last, wie Eins zur Anzahl der sämmtlichen Rollen in beyden Flaschen.

Anmerkung.

§. 264. Auch die folgenden drey Aufgaben setzen voraus, daß die von der Last angestrengten Zuglinien unter sich und mit der Richtungslinie der Last parallel sind.

Aufgabe.

§. 265. Wenn der mathematische Flaschenzug, seiner Einrichtung nach, sammt der Last gegeben ist, die Kraft für das Gleichgewicht zu finden.

Auflösung mit Beweis.

Die Einrichtung sey wie in (*Fig.* 61.). Die Last, p, sey 50 Pfund. Um die Kraft, g, zu finden, schließe man (§. 259.):

$4 : 1 = 50$ Pf. : g in Pfunden;

aufgehoben, $2 : 1 = 25 : g$

demnach ist, $g = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Pfund.

Aufgabe.

§. 266. Wenn der mathematische Flaschenzug seiner Ein-

Einrichtung nach nebst der Kraft gegeben ist, die Last für das Gleichgewicht zu finden.

Auflösung mit Beweis.

Die Einrichtung sey wieder wie in (*Fig.* 61.). Die Kraft, *g*, sey $12\frac{1}{2}$ Pfund. Um die Last, *p*, zu finden, schließe man (§. 259.):

$$1 : 4 = 12\frac{1}{2} \text{ Pfund} : p, \text{ in Pfunden.}$$

Demnach ist, $p = 4 \times 12\frac{1}{2} = \frac{4 \times 25}{2} = \frac{2 \times 2 \times 25}{2}$

$= 2 \times 25$

$= 50$ Pfund.

Aufgabe.

§. 267. Die Einrichtung des mathematischen Flaschenzugs zu finden, wenn Kraft und Last, für das Gleichgewicht an ihm, gegeben sind.

Auflösung mit Beweis.

Die Last, *p*, (*Fig.* 61.) sey 50 Pfund; die Kraft, *g*, aber sey $12\frac{1}{2}$ Pfund. Um nun die Einrichtung des Flaschenzugs zu finden, der beyde im Gleichgewichte gegen einander erhalten kann, suche man die Anzahl der Zuglinien, welche dann von der Last angestrengt werden müssen, und nenne diese noch unbekannte Anzahl indessen *y*. Man schließe (§. 259.):

$$12\frac{1}{2} : 50 = 1 : y$$

das ist, $\frac{25}{2} : 50 = 1 : y$

Es ist demnach, $y = \frac{50}{\frac{25}{2}} = 50 : \frac{25}{2} = 4$ (A. §. 161. *b*.)

Man braucht demnach vier von der Last angestrengte Zuglinien. Zwey dergleichen erfordern aber jedes Mahl eine Rolle; zwey Mahl zwey, oder viere, erfordern also zwey Rollen in der Flasche, an welcher zunächst die Last wirkt. Nach (§. 263.) nun ist die Anzahl aller Rollen in beyden Flaschen zusammen, der Anzahl der von der Last angestreng-

strengten Linien gleich. Dem gemäß werden hier überhaupt vier Rollen erfordert; und da der untern Flasche eben jetzt schon zwey haben zugetheilt werden müssen, so bleiben für die obere noch zwey übrig. Die ganze Einrichtung wird daher zu machen seyn, so wie es (*Fig.* 61.) vorstellt.

Zusätze.

§. 268. Wenn es bey Auflösung dieser Aufgabe geschieht, daß man keine gerade Zahl, wie dergleichen Vier war, für die Anzahl der von der Last angestrengten Linien erhält, sondern eine ungerade, als etwa Fünf, in welcher also Zwey nicht aufgeht: so muß man dennoch zusehn, wie viel Mahl höchstens die Zwey ganz darinnen liegt, und dem gemäß die Zahl der Rollen in der Flasche, welche die Last hält, bestimmen. Die alsdann überbleibende Eins aber macht es nöthig, daß an eben dieser Flasche noch eine Zuglinie ohne Rolle angebracht und oben an ihrer Hülse selbst befestigt werde. Für die andre Flasche werden dann die drey übrigen noch erforderlichen Rollen bestimmt. Man sehe auf (§. 262.) zurück. Die Rollen insgesammt müssen in Rücksicht ihrer Diameter so gegen einander proportionirt werden, daß die Zuglinien der Last parallel ausfallen können. Diese Proportionirung auszuführen, wird man in (*Fig.* 61.) leicht selbst den Weg bemerken; obwohl die Zeichnung, die dort von einem Flaschenzuge mit vier Rollen gegeben ist, bey gegenwärtigem Falle im Ganzen abgeändert werden muß.

§. 269. Wenn bey Auflösung der Aufgabe in (§. 267.) keine ganze Zahl kommt, so läßt sich auch die Einrichtung des Flaschenzugs für einen solchen Fall nicht angeben, insofern die Zuglinien der Last unter sich parallel verlangt werden. Von solchen Flaschenzügen allein aber ist gegenwärtig die Frage. Wenn man von der letzten Forderung abgehen wollte, blieb allerdings auch hier die Angabe der Einrichtung des Flaschenzugs möglich. Die Erklärung aber ist für diese Anfangsgründe zu schwer.

Lehrsatz.

§. 270. Wenn an einem mathematischen Flaschenzuge, bey welchem die von der Last angestrengten Linien mit der Richtungslinie der Last selbst parallel sind, nach aufgehobenem Gleichgewichte, Bewegung erfolgt: so verhält sich sowohl der natürliche als mechanische Weg, wie auch die Geschwindigkeit der Kraft, zu diesen drey Umständen bey der Last, in gleichen Zeiten, wie die Last zur Kraft.

Beweis.

Einen solchen Flaschenzug erblickt man in (*Fig.* 61.). Man bemerke bey ihm zuerst, daß die natürlichen Wege von Kraft und Last mit ihren mechanischen einerley sind; wie es bey der einfachen Rolle der zweyten Art war. (§. 255.) Denn die Last, *p*, wird bey ihrer Bewegung in einer gewissen Zeit, mit ihrem Mittelpuncte der Schwere, durch einen Theil seiner Richtungslinie, *p h*, aufsteigen; und so wird auch in derselben Zeit die Kraft, *g*, mit ihrem Mittelpuncte der Schwere, in seiner verlängerten Richtungslinie, *b g*, durch einen ihrer Theile niedersinken. Diese Linientheile sind offenbar von Last und Kraft die natürlichen Wege. Weil aber eben diese Linientheile, welche, wie ihre Ganzen, vertical sind, perpendicular auf den Horizontallinien stehen, nehmlich auf *u s* und *b q*, von welchen beyden Linien an die sich stets vergrößernden Entfernungen der Last und der Kraft gerechnet werden müssen: so sind jene Linientheile zugleich auch die mechanischen Wege von Last und Kraft. (§. 154.) Man suche nun das Verhältniß dieser Linientheile gegen einander. Man setze, daß die Bewegung nur erst so lange fortdauert, bis die Last, *p*, um einen rheinländischen Fuß in ihrer Richtungslinie, *p h*, gehoben ist; so muß in dieser Zeit jede von den Linien, welche die Last tragen, *d m* und *f i* und *e k* und *c n*, sich um einen Fuß verkürzt haben. Diese Verkürzungen zusammen betragen vier Fuß, und um diese vier Fuß muß die Zuglinie,

nie, bg, der Kraft, g, vermöge der Einrichtung des Flaschenzugs, verlängert worden seyn; das heißt: die Kraft, g, hat sich durch eine Linie von vier Fuß in eben der Zeit niederbewegt, in welcher die Last, p, nur durch einen Fuß aufgestiegen ist. Auf diese Art werden beyde durchlaufene Linien auch in den folgenden Zeittheilen gegen einander abgemessen seyn. Da nun diese durchlaufenen Linien von Kraft und Last die natürlichen und zugleich mechanischen Wege sind; so verhalten sich diese Wege bey der Kraft zu ebendenselben bey der Last, wie Vier zu Eins, das ist, allgemein: wie die Anzahl der von der Last angestrengten Linien zur Einheit; oder vermöge (§. 259.) wie die Last zu der Kraft. Weil endlich die Geschwindigkeiten von Kraft und Last sich nach dem Verhältniß der Linien richten, die sie in gleicher Zeit durchlaufen (§. 16.); so muß auch die Geschwindigkeit der Kraft, g, sich zur Geschwindigkeit der Last, p, verhalten, wie die Last zur Kraft; denn dieses war das Verhältniß jener Linien.

Zusatz.

§. 271. Wenn die Zuglinie der Kraft, g, am Flaschenzuge (*Fig.* 61.) auch nicht parallel mit den übrigen Zuglinien, sondern gegen dieselben convergirend, aber doch in ihrer Ebene, angebracht wär: so würde der itzt erwiesene Lehrsatz gleichwohl noch geltend bleiben. Man sieht dieses sogleich ein, wenn man nur an dasjenige zurückdenkt, was im (§. 256.) von der einfachen Rolle in dieser Rücksicht gezeigt worden ist.

Erklärung.

§. 272. Wenn man sich die physische Rolle der ersten Art, nach (§. 238. 239.), deutlich vorgestellt hat; so wird man sich nun auch von der physischen Rolle der zweyten Art, in Verbindung mit ihrer Hülse, ihrem Haken und dem bey ihr, anstatt der biegsamen mathematischen Fadenlinie, nöthigen Seile einen deutlichen Begriff machen können.

Man

Man sehe indessen auf die Zeichnungen (*Fig.* 57 und 56) zurück, und denke, was dort mathematisch war, physisch.

Zusätze.

§. 273. Wenn die physische Rolle der zweyten Art einfach angewendet wird auf die verschiedne Weise, welche in (*Fig.* 56. 57. 58 und 60) vorgestellt ist; so können auf sie alle die Sätze angewendet werden, welche in (§. 242. bis 256.) von der mathematischen Rolle dieser Gattung vorgetragen und erwiesen worden sind. Nur ist dabey wohl zu bedenken, daß man nun nicht mehr mit mathematischen Linien und Flächen, die ohne Schwere, ohne Friction und ohne Gefahr zu zerreißen oder zu zerbrechen sind, zu thun hat, sondern mit hölzernen und metallnen Körpern, welche schwer sind und Reibungen verursachen, ingleichen mit Stricken und Seilen, welche eine besondre Störrigkeit bey dem Umbeugen an den Rollen äußern. Was aus diesen Umständen bey der einfachen physischen Rolle der zweyten Art nothwendig folgt, läßt ihr zwar die Hauptgesetze, die sie, mathematisch betrachtet, hatte, eigen; aber es benimmt denselben die Genauigkeit, welche ihnen in jener Betrachtung zukam.

§. 274. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, nehme man in Bezug auf die physische Rolle der zweyten Art den Fall, der von der mathematischen Rolle dieser Gattung in (*Fig.* 56.) vorgestellt ist, in die Gedanken. Ein Balken soll durch sie mit Vortheil in die Höhe gezogen werden, und diesen Aufzug soll die Kraft eines Mannes unmittelbar mit den Händen bewirken. Es muß in dieser Absicht ein Seil, *e a b f*, in *e*, etwa an einen irgendwo befestigten, starken, eisernen Haken gebunden, um die hölzerne Rolle, *a b*, innerhalb ihrer Hülse, *d c*, geleitet und über eine Rolle der ersten Art, *f n*, die neben *e* mit ihrer Hülse bey *h* befestigt ist, fortgeführt werden, auch endlich von *n* nach *k* wieder tief genug herabhangen, daß es ein unten stehender Arbeiter bey *k*, wo das Gewicht

wicht nun wegbleibt, mit den Händen niederziehen kann. Anstatt der Last, *L*, denke man nun den Balken am Haken der Hülse bey *d* fest angeschlungen. Damit die Kraft gegen die Last den möglichgrößten Vortheil erlange; so müssen, wie man aus (§. 244.) weiß, die Zuglinien der Last, *ea* und *fb*, mit ihrer Richtungslinie, *ov*, parallel, und also hier sämmtlich vertical seyn. Daher muß die physische Rolle der ersten Art in *h* so befestigt werden, daß die Horizontallinie von *e* bis *f* an Größe der Horizontallinie, *ab*, in der Rolle gleicht. Nach dem im (§. 244.) für die mathema ische Rolle erwiesenen Gesetze nun sollte der bey *K* anziehende Arbeiter nur so viel Kraft, den Balken in *L* frey zu erhalten, anwenden dürfen, als dessen halbe Last beträgt, und bey einem geringen Zusatze von Kraft müßte der Balken sich aufziehen lassen. Die andre Hälfte trägt der eiserne Haken in *e*. Allein, obwohl die Schwere des Seils von *b* bis *f*, weil ihm der herabhangende andre Theil, *m* bis *k*, das Gegengewicht hält, dem Arbeiter nicht zur Last fallen kann: so hat derselbe doch die Schwere der Rolle, *ab*, selbst, nebst ihrer Hülse, zur Hälfte zu tragen. Um die Bolzen der zwey Rollen entsteht bey der Bewegung Friction, und noch einen besondern Widerstand setzt das Seil, welches sich um beyde Rollen Theil für Theil krümmen muß, seiner Störrigkeit wegen, der ziehenden Kraft entgegen. Man sucht nun zwar, Friction und Störrigkeit, nach den Regeln (§. 174 — 189.), so viel es die Umstände gestatten, zu mildern; aber immer wird die Kraft bey *K* in der Nothwendigkeit sich befinden, beträchtlich über die Hälfte der Last ihren Aufwand zu machen. Wie viel dieses betrage, läßt sich nicht genau voraus im Allgemeinen berechnen; aber die Erfahrung lehrt doch, daß für die Kraft immer noch Gewinn genug übrig bleibt. Will der Arbeiter, welcher das Seil anzieht, in der Höhe bey *f* sich hinstellen; so kann die Rolle der ersten Art, *fm*, ganz entbehrt werden, und ein Theil der Erschwerung für den Zug fällt hiermit zugleich weg. Der Arbeiter faßt nun

in

in *f* das Seil sogleich selbst an. Nun hat er aber dagegen das Gewicht des Theils, *f b*, vom Seile mit zu ziehen, und, was die Hauptsache ist, ihm wird der aufwärts zu verrichtende Zug für sich schon lästiger werden, als ihm der, bey der ersten Einrichtung, niederwärts gehende war; weil bey jenem das Gewicht des menschlichen Körpers selbst seiner Kraft Beystand leistete.

Erklärung.

§. 275. Im Gegensatz des mathematischen Flaschenzugs (§. 257.) enthält der physische lauter physische Rollen in zwey dergleichen Flaschen. Wie bey dem mathematischen hat die eine, welche fest hangt, nur Rollen der ersten, die andre aber, welche mit der Last aufgezogen wird, nur Rollen der zweyten Art. Die Rollen selbst werden durch ein, über ihre etwas ausgehöhlten Peripherien hingeführtes, Seil in Verbindung gebracht, damit das Ganze auf eine für die Kraft vortheilhafte Art zur Bewegung einer Last angewendet werden kann. Man sehe hier auf (*Fig.* 61.) zurück, und denke sich physisch, was dort mathematisch war; vergleiche nun aber damit auch (*Fig.* 62.).

Zusätze.

§. 276. Wenn man den physischen Flaschenzug auch, in Rücksicht der parallelen Zuglinien, ganz nach der Art des mathematischen (*Fig.* 61.) einrichten wollte; so würde doch bey dem ersten nicht so viel Gewinn für die Kraft entstehen können, als bey dem letztern. Denn die physische Flasche, welche zugleich mit der Last aufgezogen wird, hat eine Schwere, von der ein eben so vielter Theil auf die Kraft fallen muß, als es von der eigentlichen Last geschieht. Die Friction von mehrern Rollen, die Störrigkeit des Seiles, das sich hier öfterer, als bey der vorhin betrachteten einfachen Rolle, umbeugen muß, wird auch für die Kraft einen gar bedeutenden Zusatz über dasjenige Vermögen erfordern, das sie bereits nach (§. 259.) haben mußte.

mußte. Es kommt aber noch der Umstand dazu, daß an dem mathematischen Flaschenzuge die Rollen eine zu ungleiche Größe bekamen, wenn die Zuglinien der Last mit der letztern Richtungslinie parallel seyn sollten (*Fig.* 61.), und daß, im Fall man die eine innere Rolle, *ik*, nicht zu klein haben wollte, die äußeren, *mn* und *bc*, zu sehr beträchtlichen Größen gelangen würden. Nun will man wirklich beym physischen Flaschenzuge nicht gern eine allzukleine Rolle unter den übrigen, weil die Beugung des Seils um eine solche noch mehr Widerstand als um eine größre erregt. (§. 189.) Man will indessen von der andern Seite nicht zu große Rollen haben, theils, um die untere Flasche nicht zu lästig zu machen, theils, um das Ganze bequemer gebrauchen zu können. Kurz, man wünscht mittelmäßig große Rollen durchaus, die in der Größe etwa nur so weit unterschieden sind, als erforderlich ist, wenn die Theile des Seiles, welche bey der Bewegung auf und nieder gehen, sich nicht an einander reiben sollen. Dieses läßt sich nun erreichen, wenn man den für die Kraft freylich vortheilhaften Umstand, daß die Zuglinien der Last unter sich parallel seyn sollen, aufgiebt, und ihnen dagegen einige wechselseitige Convergenz gestattet. Dann lassen sich die Rollen insgesammt von einer Mittelgröße angeben, und auch so, daß eine von der andern in derselben nicht eben sehr verschieden ist. Man sehe dieses in (*Fig.* 62.). Daselbst sind die vier Rollen in den Diametern nur so viel von einander verschieden, daß die auf und nieder gehenden Theile des Seiles sich nicht wechselseitig reiben, und die innern Rollen, *a* und *b*, sind eben nicht auffallend kleiner, als die äußern, *c* und *d*. Man bemerkt aber leicht, bey Betrachtung der Figur, daß auch nun die Theile des Seils, welche die Flasche mit der Last, *L*, tragen, nicht mehr mit der letztern Richtungslinie, *ef*, auch nicht mehr unter sich selbst parallel sind. Dieser Umstand, wie schon aus (§. 244 und 247) bekannt ist, macht eine

Ver-

Vermehrung der Kraft, K, welche das Seil niederwärts ziehen soll, allerdings nothwendig.

§. 277. Nimmt man die Umstände, durch welche die Bewegung der Last am physischen Flaschenzuge erschweret wird, zusammen, so sieht man leicht, daß das Gesetz für das Gleichgewicht, aus mehr als einem Grunde, an ihm nicht genau dasselbe bleiben kann, welches an dem mathematischen (§. 259.) erwiesen ward: sondern daß hier die Kraft jedes Mahl beträchtlich stärker angenommen werden muß, als dort. Die Erfahrung indessen lehrt, daß der Aufzug einer Last vermittelst dieses Werkzeugs noch vortheilhaft genug bleibt, wenn man nur mit der Rollenzahl nicht über Vier bis Fünf steigt. Denn zu viele Rollen heben, wegen der öftern Umbeugungen des Seils, bald allen Vortheil auf.

§. 278. Alles, was jetzt erinnert ist, vorausgesetzt, lassen sich übrigens die Sätze, die vom mathematischen Flaschenzuge (§. 259 — 271) vorgetragen sind, auch auf den physischen überhaupt anwenden.

§. 279. Man hat auch physische Flaschenzüge, wo die Flaschen so eingerichtet sind, daß in ihnen die Rollen nicht unter einander, sondern neben einander stehn und dabey von gleicher Größe sind. Noch andre Einrichtungen findet man in practischen mechanischen Schriften wenigstens in Vorschlag gebracht. Allein, die Einrichtung sey, wie man wolle, so kann doch die Kraft bey dem Aufzuge der Last, nie genau ihrem Gesetz am mathematischen Flaschenzuge folgen; sondern sie muß beträchtlich stärker als dort angewendet werden.

§. 280. Die physische einfache Rolle der zweyten Art sowohl, als der physische Flaschenzug können auch in manchen Fällen mit Vortheil angewendet werden, wo man die Hebung einer Last durch eine Kraft, die kleiner als jene seyn soll, nicht zur Absicht hat; sondern wo man nur eine Bewegung langsamer machen will, als sie für sich seyn würde. Ein Exempel von einer solchen Anwendung der

physischen, einfachen Rolle der zweyten Art wird zur Erläuterung dieser Anzeige überhaupt hinreichen. Man setze, daß eine gemeine Wanduhr in einem niedrigen Gemache nur so hoch an der Mauer befestigt werden kann, daß ihr Gewicht schon nach zwanzig Stunden den Boden erreicht, und also nach Verlauf dieser Zeit auch schon wieder aufgezogen werden muß. Wünschte man nun, daß bey eben dieser Uhr, in gleicher Höhe, erst nach doppelter Zeit, oder in vierzig Stunden ein neuer Aufzug nöthig sey; so müßte man das Niedersinken ihres Hauptgewichts langsamer und zwar doppelt langsamer zu machen suchen. Dieses wird sich durch die einfache Rolle der zweyten Art erreichen lassen. In (*Fig.* 63.) nehmlich stellt die Linie, *a d*, das unterste Bret einer gemeinen Wanduhr vor, bey *b* und *c* sind in ihm die Oefnungen, durch welche die Schnur, die das Hauptrad des Werks treibt, und das Gewicht, *g*, nebst seinem Gegengewichte, *h*, tragen soll, ihren Lauf nehmen kann. Anstatt die Gewichte, wie es gewöhnlich ist, unmittelbar selbst an die Enden der Schnur zu befestigen, verbinde man jedes mit der Hülse einer kleinen Rolle, *e* und *f*, der zweyten Art, wie es die Figur zeigt; die Schnure ziehe man um beyde Rollen her und knüpfe ihre Enden bey *v* und *n* an zwey Ringe, welche unten an der Uhr von den Oefnungen, *b* und *c*, so weit befestigt sind, daß jedes Paar der für ein Gewicht zusammen gehörigen Zuglinien parallel hangen kann. Die Gewichte selbst müssen ungefähr doppelt so schwer genommen werden, als es ohne Anwendung der Rollen nöthig wär; weil die Ringe, *v* und *n*, an der Uhr die Hälften ihrer Schweren tragen. Es ist offenbar, daß nun das Gewicht, *g*, nicht eher den Boden des Gemachs erreichen kann, als bis es von der Schnure, an welcher es zieht, doppelt so viel über das zugehörige Rad in der Uhr weggeführt hat, als es ohne Rolle gethan haben würde. Dazu ist aber doppelte Zeit nöthig, weil die neue Einrichtung mit dem Gewicht den Gang des Rades nicht beschleunigt.

Ist

Ist ein Schlagwerk bey der Uhr, so kann man bey den dazu gehörigen Gewichten auf gleiche Art gleichen Vortheil erhalten. Werden endlich die Gewichte eines Weckerrades eben so behandelt, so wird das Wecken jedes Mahl doppelt so lange anhalten, als es vorhin geschah.

Erklärungen.

§. 281. Ein mathematisches Rad an der Welle (axis in peritrochio) ist ein mathematischer gerader Cylinder, *b d*, (*Fig.* 64.) der in einer dergleichen Zirkelfläche, *f g*, perpendicular so befestigt ist, daß seine Achse, *b d*, durch ihren Mittelpunct, *c*, gehet, und auf Widerlagen, *a* und *e*, ruht, welche die gemeinschaftliche Wendung des Cylinders sowohl, als der mit ihm verbundnen Zirkelfläche um sich selbst zulassen.

§. 282. Der Cylinder, *b d*, (*Fig.* 64.) heißt die Welle des Rads; die Zirkelfläche, *f g*, das Rad selbst; die Verlängerungen der Achse des Cylinders außer ihm auf beyden Seiten, *b a* und *d e*, heißen die Zapfen der Welle, und die Widerlagen, *a* und *e*, oder was ihnen gleich gilt, werden die Zapfenlager oder die Pfannen der Zapfen genennt.

Zusätze.

§. 283. In (*Fig.* 64.) zeigt sich das Rad an der Welle, schräg von der Seite her ins Auge gefaßt; in (*Fig.* 65.) aber so, wie es erscheint, wenn es nach der Richtungslinie seiner Achse angesehen wird. Da stellt die größre Zirkelfläche, *a*, das Rad, die kleinre, *b*, aber die vordere Grundfläche der Welle vor: doch kann *b* auch jeden Durchschnitt der letztern andeuten, auf welchem ihre Achse perpendicular steht. Der Punct, *c*, ist die vordere Grenze der Achse, und unter ihm erscheint die eine Widerlage, welche hier allein sichtbar seyn kann.

§. 284. Wenn man bey dem Rade an der Welle das Rad für sich, das heißt, nur die Zirkelfläche, *a*, (*Fig.* 65.) mit ihrer Achsenlinie, *c*, betrachtet; so hat man eine Rolle

der

der ersten Art: und eine eben dergleichen sieht man in jedem Durchschnitte der Welle, *b*, auf welchem ihre Achse perpendicular stehet. Daher kann man auch die ganze cylindrische Welle sammt ihrer Achse, vom Rade abgesondert, als eine Rolle der ersten Art betrachten. Hieraus folgt, daß alles, was von jener Rolle erwiesen worden ist, auf das Rad und seine Welle richtig angewendet werden kann, so lange man nur eins ohne das andre in Erwägung ziehen will. Zum Beyspiel: wenn sich eine mathematische biegsame Linie, welche um die Peripherie der Rolle gelegt war, frey in der erweiterten Rollenfläche abwickelte; so that sie es in einer Tangente, und machte im Abwicklungspuncte mit dem Radius einen rechten Winkel. Dieses wird also auch bey dem Rade gelten; ingleichen bey der Welle für jeden ihrer Durchschnitte, der auf ihrer Achse perpendicular steht.

Erklärungen.

§. 285. Jede gerade Linie, die eine Tangente zunächst für irgend einen Durchschnitt der Welle ist, auf welchem ihre Achse perpendicular steht, nenne man kurz eine Tangente der Welle. Jeder Durchschnitt der Welle aber, nach dieser Bestimmung, ist ein Zirkel, wenn man, wie hier, die Welle als einen geraden Cylinder annimmt. (S. §. 514.)

§. 286. Wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich angezeigt wird; so versteht man, bey dem Rade an der Welle, unter der Last diejenige Kraft im weiten Verstande, welche an der Welle wirkt; unter dem Namen, Kraft, aber die andre, welche ihre Wirksamkeit zunächst am Rade äußert.

Lehrsatz.

§. 287. Wenn bey dem mathematischen Rade an der Welle, (*Fig.* 65.) Kraft, *n*, und Last, *p*, sich einander entgegen wirken, und zwar so, daß die Richtungslinie,

dn,

dn, der Kraft eine Tangente des Rades, *a*, die Richtungslinie, *ep*, der Last aber eine Tangente der Welle, *b*, ist (§. 285.): so findet sich zwischen beyden das Gleichgewicht, wenn die Kraft zur Last sich verhält, wie der Radius der Welle, *ce*, zum Radius des Rades, *cd*.

Beweis.

Des Rades Fläche, *a*, (*Fig.* 65.) denke man hier vertical; so wird seine Welle, *b*, horizontal mit ihren Zapfen in den Lagern aufliegen. Eine biegsame mathematische Linie sey in einem Puncte der Peripherie des Rades, *a*, befestigt, um dieselbe von *a* nach *d* hingewunden, und wickle sich in *d* los; indem das Gewicht, *n*, als Kraft, sie vertical, und also in der erweiterten Radfläche, niederzieht. An der Welle, *b*, sey in einem Puncte ihrer gebognen Außenfläche gleichfalls eine biegsame mathematische Linie befestigt. Man nehme diesen Punct in besagter Fläche, wo man wolle; so wird er zugleich in der Peripherie eines solchen Durchschnitts der Welle liegen, auf dem ihre Achse perpendicular steht, der ein Zirkel ist (§. 285.), und hier eine verticale Stellung hat. Um die Peripherie dieses Durchschnitts nun sey die biegsame Linie von *b* nach *e* hingewunden, und hiermit nach einer Richtung, die derjenigen, welche bey der vorigen Windung einer eben solchen Linie um das Rad genommen ward, entgegen gesetzt ist. Im Puncte, *e*, hangt die Linie losgewickelt herab, indem an ihr das Gewicht, *p*, als Last, vertical und also in der erweiterten Ebene des Durchschnitts niederzieht. Da das Rad, für sich betrachtet, als eine Rolle der ersten Art angesehen werden kann und eben so der mehrmahls erwähnte Durchschnitt der Welle, an dem die Last wirkt (§. 284.); so ist, nach der Lehre von den Rollen (§. 232.), die Linie, *dn*, eine Tangente vom Zirkel, *a*, und die Linie, *ep*, eine Tangente des Zirkels, *b*. Ueberdieses wirken beyde Gewichte an diesen Tangenten offenbar einander entgegen, indem sie das Rad an der Welle nach einander entgegen gesetz-

gesetzten Seiten zu drehen streben. Hiermit sind also die Bedingungen da, welche im Lehrsatze gefordert werden. Nun wird es nicht schwer seyn, in diesem Rad an der Welle den Hebel mit verschobenen Armen zu finden, der in (§. 119.) erklärt worden ist und hier deutlich wieder in die Gedanken gefaßt werden muß. Die Achse, *c*, nehmlich ist als seine Ruhelinie (§. 119.) zu denken; sein einer, größerer Arm ist der Radius, *cd*, des Rades; sein kleinerer ist der Radius, *ce*, der Welle. In der Figur scheinen zwar diese beyden Arme, *cd* und *ce*, in einer ununterbrochenen geraden Linie zu liegen; dieses aber kommt von der hier gewählten Stellung des Auges in der fortgesetzten Achsenlinie her. Zwischen dem Puncte, *c*, in der Figur, als Grenzpunct des Radius, *dc*, betrachtet, und zwischen eben diesem Puncte, *c*, als Grenzpunct des Radius, *ec*, angesehn, muß ein kleinerer oder größerer Theil der Achsenlinie in der Welle gedacht werden, nachdem man in der letztern den Durchschnitt, *be*, dessen Tangente, *ep*, ist, vom Rade selbst weniger oder mehr, vorwärts nach dem Auge zu entfernt setzen will. Dem nun gemäß, was schon vorhin in diesem Beweise gezeigt worden ist, stehn beyde Radien, *cd* und *ce*, auf der Achse, als der Ruhelinie des Hebels, perpendicular; und an beyden sind auch schon die Winkel, *cdn* und *cep*, wegen der Tangenten, als rechte bekannt: daher sind die verschobenen Arme des Hebels zugleich die Entfernungen von der Ruhelinie; und beym Gleichgewicht muß seyn (§. 119.);

$$n : p = ce : cd$$

das ist: die Kraft, *n*, verhält sich dann zur Last, *p*, wie der Radius der Welle, *ce*, zum Radius des Rades, *cd*.

Zusätze.

§. 288. Weil im Beweise des vorigen Satzes frey wirkende Gewichte als Kräfte angewendet wurden; so waren allerdings ihre Richtungslinien, *dn* und *ep*, (*Fig.* 65.) vertical und hiermit auch parallel. Die Welle des Rades

mußte

mußte dabey horizontal liegen und die Radfläche vertical stehen. Allein auf diesen parallelen, horizontalen und verticalen Lagen der angezeigten Gegenstände beruhte die Hauptsache des Beweises nicht, wie man bey seiner Wiederholung leicht sehen wird; sondern darauf, daß die Kräfte einander entgegen wirkten, daß ihre Richtungslinien Tangenten an Rad und Welle waren, und daß also auch jede dieser Linien in der erweiterten Ebene desjenigen Zirkels sich befand, welchem sie angehörte. Hieraus folgt, daß die im vorigen Lehrsatze erwiesene Regel für das Gleichgewicht wahr bleibt, wenn auch das Rad mit der Welle eine Lage außer der verticalen hat, welche man will. Nur können dann, wenn Gewichte gebraucht werden sollen, dieselben nicht ihrer freyen Wirkung überlassen werden; sondern ihre Zuglinien müssen über Rollen der ersten Art so schicklich geleitet seyn, daß sie an ihren Zirkeln Tangenten bleiben. Will man die Zuglinien durch Kräfte von Händen anstrengen lassen; so läßt sich, da diese ohne Anwendung von Rollen nach jeder nöthigen Richtung wirken können, die Ausführung noch leichter denken.

§. 289. Weil ferner bey den Richtungslinien der Kräfte ihre parallele Lage gegen einander nicht nothwendig war; so darf man den Tangenten, in denen sie wirken sollen, die Berührungs- oder Abwicklungspuncte in jedem beliebigen Puncte der Peripherie des Rades und der cylindrischen Außenfläche der Welle anweisen. Nur wird dann der Hebel mit verschobenen Armen, welchen man im Beweise gebraucht, kein solcher seyn, dessen Arme in einerley Ebene liegen, wie der, dessen man sich im Beweise des letzten Lehrsatzes bediente, der auch zugleich unter die Hebel der ersten Art gehörte; sondern es wird bald ein Winkelhebel mit verschobenen Armen seyn, bald ein Hebel der zweyten Art mit verschobenen Armen. (§. 119.)

§. 290. Wenn man bey der Vorstellung des Rades an der Welle (*Fig.* 65.) nur die Welle, *b*, mit der ihr zugehörigen biegsamen Linie und Last, *p*, beybehält; das Rad,

a,

a, aber nebst seiner umhergelegten biegsamen Linie und Kraft, *n*, verschwinden läßt, doch so, daß der zum Abwicklungspuncte, *d*, der letztern gehörige Radius, *c d*, als eine mathematische, unbiegsame Linie dableibt, und nun auf diesen Radius perpendicular, im Puncte, *d*, so stark mit einer Hand niederdruckt, als das Gewicht, *n*, vorher niederzog: so wird das Gleichgewicht zwischen dem Handdrucke, als Kraft in *d*, und dem Gewichte, *p*, als Last, noch eben so Statt finden, als zuvor. Denn auf diesen Radius, *c d*, und auf die in *d* rechtwinklig gegen ihn niederwärts gerichtete Wirkung kam auch bey dem noch ganzen Rade, so lange bloß Gleichgewicht erhalten werden sollte, die Hauptsache an.

§. 291. Wenn ferner dieser Radius, *c d*, (*Fig.* 65.) von dem Puncte, *v*, an, wo er aus der Welle tritt, in irgend einer gebogenen Linie bis zum Puncte, *d*, fortgeführt würde, und nun gegen diese in *d* die Hand mit voriger Kraft, perpendicular nicht auf sie selbst, sondern auf den nun unsichtbar gewordenen Radius des Rades, welcher zum Puncte, *d*, gehört, wirkte: so müßte das gefundne Gesetz des Gleichgewichtes unverändert auch dann bestehen. Denn die Entfernung der Kraft vom Ruhepuncte, oder vielmehr hier von der Ruhelinie, würde ungeändert bleiben, und also blieb es auch ihre Wirkung in Rücksicht der Last. Man wird hierüber noch mehr Licht gewinnen, wenn man auf dasjenige zurücksehen will, was in (§. 118 und 128) von dem krummlinigen Hebel gezeigt worden ist.

Aufgabe.

§. 292. Wie für ein mathematisches Rad an der Welle, bey dem die Kräfte nach Tangenten wirken, wenn sowohl das Verhältniß der Radien in Welle und Rad, als auch die Kraft gegeben ist, die Last, welche mit jener das Gleichgewicht hält, gefunden werden soll.

Auflösung mit Beweis.

Gesetzt, der Radius der Welle verhalte sich zum Radius des Rades, wie Eins zu Acht, etwa wie ein Zoll zu acht Zoll, und die gegebene Kraft sey fünf Loth: so schließe man auf die unbekannte Last, die indessen p heißen mag, vermöge (§. 287.) also: Wie sich verhält der Radius der Welle zum Radius des Rades; so muß sich verhalten die Kraft zu der Last, und suche die letzte dann nach den arithmetischen Regeln. Der Schluß im gegenwärtigen Falle ist demnach:

$$1 \text{ Zoll} : 8 \text{ Zoll} = 5 \text{ Loth} : p \text{ Loth}$$

oder kürzer $1 : 8 = 5 : p$ Loth

Also ist $p = \frac{1 \times 5}{1} = 8 \times 5 = 40$ Loth $= 1$ Pf. 8 Loth.

Aufgabe.

§. 293. Wie bey einem eben solchen Rade an der Welle, wenn sowohl das Verhältniß der Radien in Welle und Rad gegen einander, als auch die Last gegeben ist, für das Gleichgewicht mit dieser die Kraft gefunden werden soll.

Auflösung mit Beweis.

Das Verhältniß der Radien gegen einander sey wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe, und die Last sey vierzig Loth gegeben. Man suche nun die Kraft vermöge (§. 287.) durch den Schluß: Wie sich verhält der Radius des Rades zum Radius der Welle, so muß sich bey dem Gleichgewichte verhalten die gegebene Last zu der noch unbekannten Kraft, die indessen mit n benannt werde. Für gegenwärtigen Fall muß also seyn:

$$8 : 1 = 40 : n$$

demnach ist $n = \frac{1 \times 40}{8} = \frac{40}{8} = 5$ Loth.

Aufgabe.

§. 294. Wie für ein Rad an der Welle das Verhältniß

niß zwischen den Radien der Welle und des Rades gefunden werden kann, wenn Kraft und Last gegeben werden, welche an demselben, gegen einander nach Tangenten wirkend, sich das Gleichgewicht halten sollen.

Auflösung mit Beweis.

Die gegebene Kraft sey fünf Loth, die gegebene Last sey vierzig Loth. Weil nun der Radius der Welle zum Radius des Rades, unter der Voraussetzung, welche die Aufgabe beyfügt, sich verhalten muß, wie die Kraft zu der Last (§. 287.); so nehme man für den Radius der Welle eine gerade Linie an, so klein oder groß man will; da man schon weiß, daß es bey dem Gleichgewichte an diesem Rade nicht auf die Größen der Radien in Welle und Rad für sich betrachtet ankommt, sondern nur auf ihr wechselseitiges Verhältniß. Den noch unbekannten Radius des Rades nenne man indessen R, und schließe: Wie sich verhält die Kraft zur Last, so muß sich verhalten die angenommene Größe des Radius der Welle zur Größe des Radius im Rade. In gegenwärtigem Beyspiele setze man die Größe des Radius der Welle ein Zoll, und suche nun R in Zollen, indem man schließt:

$$5 \text{ Loth} : 40 \text{ Loth} = 1 \text{ Zoll} : R \text{ Zoll}$$

kurz, $5 : 40 = 1 : R$

Es ist R demnach $= \frac{40 \times 1}{5} = \frac{40}{5} = 8$ Zoll.

Lehrsatz.

§. 295. Am bewegten Rade mit der Welle verhält sich, in gleicher Zeit, der natürliche und mechanische Weg sowohl, als auch die Geschwindigkeit der Kraft, zu diesen drey Umständen bey der Last, wie die Last zur Kraft, im Gleichgewicht; in so fern nur Kraft und Last beyderseits in geraden Linien nach Tangenten an Rad und Welle sich bewegen.

Beweis.

§. 296. Man lasse Kraft und Last am Rade mit der

Welle gegen einander in den frey abgewickelten Tangentenlinien wirken, wie in (*Fig.* 65.) vorgestellt ist; so sind, wenn durch eine kleine Verstärkung der Kraft Bewegung entsteht, die natürlichen Wege von Kraft und Last Theile der Tangenten, *dn* und *ep*, und also gerade Linien. Die mechanischen Wege, welche vermöge (§. 156.) hier perpendicular auf den Radien, *cd* und *cc*, zu denen die Abwicklungspuncte, *d* und *e*, gehören, genommen werden müssen, sind demnach mit den natürlichen einerley, und werden folglich mit jenen auch einerley Verhältniß gegen einander haben. In der Zeit nun, in welcher sich das Rad ein Mahl um seine Achse dreht, wird die Kraft, *n*, durch eine gerade Linie niedersteigen, welche der Peripherie des Rades gleicht, und die Last, *p*, wird in derselben Zeit durch eine gerade Linie gehoben werden, die so groß als die Peripherie der Welle ist. Demnach verhält sich sowohl der natürliche als der mechanische Weg der Kraft zu dem natürlichen und mechanischen Wege der Last, wie die Peripherie des Rades zur Peripherie der Welle, oder (G. §. 439.) wie der Radius des Rades zum Radius der Welle, das ist (§. 287.), wie die Last zur Kraft beym Gleichgewicht. Da ferner diese Wege von Kraft und Last in einerley Zeit zurückgelegt werden, nehmlich bey jeder völligen Umwendung des Rades; so verhält sich, wie sie, auch die Geschwindigkeit der Kraft zur Geschwindigkeit der Last. (§. 16.)

Erklärungen.

§. 297. Das physische Rad an der Welle, welches aus Holz oder Metall, oder auch theilweise aus beyden verfertigt wird, kann, wie das mathematische, bald in Gestalt einer Zirkelscheibe an einer cylindrischen Welle (§. 281.), bald als eine cylindrische Welle mit einem aus ihr hervorgehenden, geraden oder gebogenen Arme (§. 290. 291.) gearbeitet seyn; in so fern nur die Kräfte, welche daran wirken sollen, es so gestatten. Doch wird, im ersten Falle, die Zirkelscheibe, weil sie aus Holz oder Metall besteht, einige

nige Dicke haben müssen; und der, im andern Falle, aus der Welle hervorgehende Arm, er sey gerade oder gebogen, kann beym physischen Rade nicht mehr eine mathematische Linie seyn, sondern hier ist er eine Art von körperlichem Stabe. Allein, außer diesen beyden Einrichtungen, welche bey dem mathematischen Rade betrachtet worden sind, nimmt das physische noch gar manche andre an; nachdem nehmlich die wirkenden Kräfte es erfordern. Es zeigt sich oft in einer Form, unter welcher das ungeübte Auge es nicht sogleich für das, was es ist, nehmlich für das Rad an der Welle erkennt. Einige folgende Paragraphen sollen über dieses alles weitere Erklärung mittheilen.

§. 298. Wenn die Umstände so sind, daß die Last an einem Seile, vermittelst eines kleinern Gewichts, das an einem andern niederzieht, gehoben werden soll; so kann man das physische Rad ganz nach der Form des mathematischen (*Fig.* 64. 65.) einrichten. Das eine Seil, an welchem die Kraft zieht, ist um das Rad, welches auf der Peripherie eine kanalförmige Vertiefung hat, gewunden; das andre aber, welches die Last trägt, um die Welle in entgegengesetzter Richtung. Die Radien des Rades und der Welle sind hier, weil die Wirkungen nach Tangenten geschehn, die Entfernungen der Kräfte. Die Scheibe des Rades kann entweder durchaus voll (*Fig.* 64.), oder, um ihr eine geringere Schwere zu geben, durchbrochen gearbeitet seyn; etwa so (*Fig.* 66.), daß verschiedne Speichen, *a c*, sich an der Welle, *v*, halten, und umher einen Ring, *a b d*, tragen, der aus Theilen zusammengesetzt ist, die wie Zirkelbogen geformt sind und Felgen genennt werden.

Anstatt der Kraft, *n*, die ein Gewicht ist, könnte auch ein Mann das Seil daselbst anfassen, es nach einer Tangente des Rades allmählig an sich ziehn, und so die Last, *p*, an der Welle in die Höhe winden.

Wenn aber, durch Hülfe eines kurzen Seils, ein Rad durch Menschenhände sehr lange umgetrieben werden soll; so kann ein sogenanntes Seil ohne Ende um die Peripherie

rie gelegt werden, das heißt, ein Seil, dessen beyde Enden mit einander so vereinigt sind, daß das Ganze eine Schlinge vorstellt. Diese Schlinge wird größer gemacht, als die Peripherie des Rades, damit, wenn sie um dieselbe gehangen ist, ein Arbeiter sie mit den Händen bequem fassen, und durch ihren Anzug das Rad treiben kann. Damit doch dieses das Seil nicht, ohne stets zu folgen, umsonst über sich hingleiten lasse; so bekommt es an der Peripherie eiserne Stifte oder Haken, mit welchen es sich an das Seil, so lange es nöthig ist, anhält.

§. 299. Soll der Arbeiter kein Seil zur Umtreibung eines Rades, für die Kraft seiner Hand, anwenden; sondern dieselbe unmittelbar an das Rad legen: so wird dieses, zunächst um die Welle, *a*, her, (*Fig.* 67.) als eine volle Scheibe, *b d*, gearbeitet; die Peripherie aber bekommt mehrere zapfenartige Angriffe, *d c*, *b f*, u. s. f., wie die Figur zeigt. Wenn nun der Arbeiter einen solchen Angriff, *d c*, bey *c* mit der Hand niederdrückt, und dann immer mit dem folgenden, wenn er ihm näher kommt, auf gleiche Art verfährt; so wird die Last, *m*, die an der Welle, *a*, hangt, herauf gewunden werden.

Zusatz.

§. 300. Der Radius des Rades ist hier eine gerade Linie aus dem Mittelpuncte der Welle bis zur äußersten Grenze desjenigen Angriffs, auf welchen jedes Mahl der Druck mit der Hand geschieht. Damit nun dieser Radius zugleich die Entfernung der Richtungslinie der Kraft vom Ruhepuncte, das ist hier vom Mittelpuncte der Welle, sey, und die Kraft also den möglich größten Vortheil gewinne; so muß der Druck auf jeden Angriff perpendicular gegen den Radius geschehen, zum Beyspiel, auf den Angriff, *d c*, (*Fig.* 67.) nach der Richtung, *c n*, nicht etwa nach einer schiefen Richtung, wie *e s*. Denn dann würde die kleinre Linie, *v s*, nach der Hebellehre, die Entfernung werden,

und

und die Kraft würde weniger als vorhin gegen die Last wirken.

Erklärungen.

§. 301. Will man zur Bewegung des Rades nicht die unmittelbar angewendete Kraft der Hände allein, sondern vielmehr das Gewicht des ganzen menschlichen Körpers gebrauchen: so wird das Rad so eingerichtet, daß es rings umher gleichsam mit Stufen versehn ist, auf welchen ein oder ein paar Arbeiter immer in die Höhe zu steigen streben; die aber durch ihre Schwere jede erreichte Stufe auch sogleich niederwärts drängen, und auf diese Weise das Rad sammt der Welle anhaltend umtreiben.

§. 302. Wenn ein Rad an der Welle durch die Kraft des Wassers getrieben werden soll, und die Umstände des Orts es zulassen, daß man dem Wasser unter dem Rade hin seinen Weg anweisen kann; so bedient man sich eines unterschlächtigen Wasserrads. Dieses bekommt zwischen zwey großen hölzernen Ringen mehrere eingesetzte Breter, die man Schaufeln nennt. An diese stößt das unter dem Rade lebhaft wegströmende Wasser an, drängt sie vor sich hin und dreht also das Rad um. Ist aber die Lage des Orts so, daß sich das Wasser bequemer über das Rad hinleiten läßt; so wählt man ein oberschlächtiges Wasserrad. Bey diesem werden die Schaufeln außerhalb seiner Peripherie um dieselbe her angesetzt, das Wasser schießt auf sie über das Rad herab, und setzt es hiermit in Bewegung.

§. 303. In den Darstellungen von (§. 298.) bis (§. 302.) hat man noch immer, nebst der Welle, auch das Rad deutlich erblickt; allein es kommen auch Fälle vor, wo die Vortheile, die ein Rad an der Welle gewähren kann, zwar erreicht werden sollen, bey welchen aber nur die Welle sogleich in die Augen fällt, das Rad hingegen, seiner vollkommnen Gestalt nach, sich nicht zeigt, weil wirklich sein Ganzes nicht nur nicht nöthig, sondern vielmehr lästig

seyn

seyn würde. So ist es bey den mancherley Arten der Winden und Haspeln. Soll z. B. eine Welle von Menschen, die um sie im Kreise gehen, durch Druck umgetrieben werden, und eine Last bewegen; so darf nur so viel vom ganzen Rade gefertiget werden, als für die bewegende Kraft nothwendig ist. Man stelle eine cylindrische Welle, *a b*, (*Fig.* 68.) mit ihren Zapfen in den Pfannen vertical auf, füge in sie horizontal einen hölzernen Arm, *c d*, ein, in der Höhe, daß ihn ein Mensch bequem, nahe am Ende, *d*, seitwärts fassen, und, im Kreis fortgehend, vor sich hindrängen kann: so wird auf diese Weise eine Last, *p*, deren Seil, *p e*, über eine Rolle der ersten Art, *e*, geleitet und an der Welle unter, *a*, befestigt ist, mit Vortheil aufwärts gewunden werden können. Dieses ist eine stehende Winde (ein Göpel), wie sie, Kaufmannswaren auf Böden zu bringen, oft gebraucht wird.

Zusatz.

§. 304. Es würde hier nichts nützen, sondern vielmehr die Bewegung erschweren, wenn in der Höhe des Windenarms, *c d*, (*Fig.* 68.) das ganze Rad, davon er gleichsam einen physischen Radius vorstellt, horizontal um die Welle gelegt wär; so bald der Arbeiter doch nur den Theil seiner Peripherie bey *d* im Fortschreiten vor sich hintreiben sollte. Uebrigens muß der Druck auf den Windenarm stets perpendicular gegen seine Längenlinie unterhalten werden, damit er vortheilhaft in der Tangente des Zirkels geschieht, den der Arm, *c d*, mit seiner Grenze, *d*, beschreibt. Man sehe auf (§. 300.) zurück.

Will man der Winde (*Fig.* 68.) außer dem Arme, *c d*, noch einen Gegenarm, *c f*, geben; so können zwey Personen dieselbe treiben. Es können auch an ihr vier Arme so angesetzt seyn, daß sie ein horizontalliegendes Kreuz bilden; dann werden sich vier Arbeiter zugleich anstellen lassen.

Erklä-

Erklärung.

§. 305. Wird die Welle, horizontal auf Widerlagen ruhend, angebracht und mit einem hölzernen, verticalstehenden Kreuze zum Angriffe versehn; so entsteht ein Kreuzhaspel. Ein Arbeiter tritt darneben, und treibt die Welle, an welcher ein Seil, das eine Last aufwärts heben soll, befestigt ist, vermittelst des Kreuzes herum; indem er immer einen Arm desselben nach dem andern niederdruckt. Hat die Welle, in einer schicklichen Entfernung von einander, zwey Kreuze; so kann an jedem ein besonderer Arbeiter wirken. Wenn sie ohne Kreuz, aber an ihren beyden Grundflächen mit so gebogenen Angriffen versehn ist, wie sie bey *b* und *c* (*Fig.* 69.) vorgestellt werden; so heißt das Werk ein Hornhaspel; die Angriffe selbst aber werden Kurbeln oder auch Kurben, und besonders bey diesem Haspel Hörner genennt. An jeder Kurbel wird ein Arbeiter zum Umdrehen angestellt.

Zusatz.

§. 306. Wer dasjenige, was (§. 303. 304.) über die verticalstehende Winde gesagt worden ist, wohl gefaßt hat, wird leicht einsehn, daß bey dem jetzt erklärten, mit seiner Welle horizontalliegenden Kreuzhaspel als Radius des Rades die gerade Linie angenommen werden muß, die in jedem Arme seines Kreuzes, vom Orte des Angriffs an, auf die Achse der Welle perpendicular gezogen werden kann. Eben so leicht wird man bey dem Hornhaspel den Radius des Rades in der Perpendicularlinie wahrnehmen, welche von da, wo die Kurbel angefaßt wird, auf die verlängerte Achse der Welle fällt.

Erklärung.

§. 307. Wie bisher von einigen solchen Einrichtungen des Rades an der Welle Beyspiele gegeben worden sind, bey welchen das Rad nicht als ein volles Rad erschien:

so

so ist nun auch in Rücksicht der Welle zu bemerken, daß diese sich ebenfalls nicht immer wie ein voller Cylinder zeigt. Oft ist nur so viel von ihr da, als eben für die schickliche Anbringung der für sie gehörigen Kraft genug ist. Man stelle sich das sehr bekannte Seilerrad vor, welches zur Drehung der Bindfäden und Schnuren gebraucht wird. Das Rad selbst ist ordentlicher Weise ein großes Rad mit Speichen und Felgen. (§. 298.) Mit seiner Achse aber ist eine Kurbel verbunden, deren Angriffspunct bey der Umdrehung eigentlich die Peripherie der Welle, die man sich zu denken hat, angiebt. Eben so findet man es an dem gemeinen Spinn- und Scherenschleiferrade. Bey dem einfachen Schleifsteine, den man durch Treten in Bewegung setzt, um an ihm größre, eiserne Werkzeuge zu schärfen, ist die Welle auf gleiche Art in der Kurbel zu denken; und die Perpendicularlinie, welche man aus dem Angreifungspuncte der Kurbel auf die Achse der Welle fällt, ist für der letztern Radius anzunehmen.

Zusätze.

§. 308. Ueberhaupt ist in Rücksicht der Welle, wenn ihr Radius mit dem Radius des Rades, um das Vermögen eines Werkzeuges zu beurtheilen, verglichen werden soll, wohl zu merken, daß man nicht sogleich, ohne vorgängige Prüfung, den vielleicht beym ersten Anblick in die Augen fallenden Cylinder im Rade für die eigentliche Welle halten darf. Denn nur in einzelnen Fällen ist es so; in andern aber auch nicht. Es ist vielmehr jedes Mahl erst zu untersuchen, ob eine von den wirkenden Kräften zunächst an der Oberfläche dieses Cylinders sich thätig erweist. Dieses findet man z. E. bey der stehenden Winde (*Fig.* 68.) und bey dem liegenden Hornhaspel (*Fig.* 69.); und in beyden ist daher der Cylinder in der That die eigentliche Welle. Allein es kommen auch stehende Winden vor, welche das Seil von der Last nicht unmittelbar um den angezeigten Cylinder schlingen, sondern um einen sogenannten Korb,

der

der jenen irgendwo umgiebt. Dieser Korb wird aus Stäben so zusammen gesetzt, daß er einen hohlen kurzen Cylinder vorstellt, der einen größern Radius hat, als der lange Cylinder. Hier ist offenbar der Korb für die eigentliche Welle anzunehmen; denn an ihm wirkt zunächst durch ihren Zug die Last.

§. 309. Man nehme auch ein Exempel hierbey an der in Privathaushaltungen wohlbekannten Kaffeemühle. Das Hauptwerk an ihr ist eine eiserne stehende Winde mit einem Arme zum Umdrehen für die bewegende Kraft. Man pflegt diesen Arm deswegen die Drehe zu nennen. Die Last, welche durch die Drehung mit der Hand überwunden werden soll, ist hier kein zu hebendes Gewicht, sondern der Widerstand, den die Kaffeebohnen, vermöge des natürlichen Zusammenhangs ihrer Theile, der drehenden Kraft entgegen setzen, ehe sie sich von ihr in Mehl zermalmen lassen. Dieser Widerstand wirkt aber nicht zunächst auf das cylindrische Eisen, welches von der Drehe in die Mühle hinab geht, sondern auf den eisernen Körper, der um jenen Cylinder her am untern Theile angebracht ist. Derselbe Körper hat fast die Gestalt eines abgekürzten Kegels, dessen Seitenfläche wie mit krummen Furchen durchzogen ist und sich in einem eisernen hohlen Cylinder herumdreht, der auch Vertiefungen hat. Zwischen jenem Kegel und diesem Cylinder nun werden die Bohnen gehalten, eingeklemmt und zermalmt. Sie üben einen Widerdruck gegen den Kegel aus; und eben darum ist er, nicht aber das cylindrische lange Eisen, im mechanischen Verstande, als die Welle zu betrachten. Auf seinen Radius, in der mittlern Tiefe, wo die Zermalmung geschieht, kommt es an.

Erklärung.

§. 310. In vielen Fällen zwar ist die im engen Verstande sogenannte Kraft, bey dem Rade mit der Welle, nicht an der letztern, sondern an dem erstern angebracht; welches auch da nöthig ist, wo mit irgend einer Kraft einer

größern

größern Last Widerstand geleistet und derselben Bewegung bewirkt werden soll: es kommen aber auch Fälle vor, wo die Kraft an der Welle, die Last aber am Rade wirkt. Dieses geschieht ordentlicher Weise dann, wenn die zu bewältigende Last in Rücksicht der Kraft nicht beträchtlich groß ist, der Kraft aber es vorzüglich auf eine sehr schnelle Bewegung von jener ankommt. So findet man es am Seilerrade, am Spinnrade, an der gemeinen Scherenschleifermaschine und an dem einfachen Schleifsteine. (§. 307.) Das erste wird durch die Kraft der Hand, die übrigen drey werden durch den Tritt des Fußes in Bewegung gesetzt. In allen wirkt die Kraft auf die Kurbel, das ist, auf die Welle des Rades (§. 307.); die mechanisch sogenannte Last hingegen, oder der zu überwindende Widerstand, äußert sich an der Peripherie des Rades selbst.

Zusätze.

§. 311. Bey den jetzt angeführten Beyspielen bemerke man noch, daß das Rad selbst, wenn es nur erst in einen lebhaften Umschwung versetzt ist, die Arbeit der bewegenden Kraft unterstützt, indem es in diesem Zustande zu verbleiben und also den Lauf fortzusetzen strebt. (§. 22.) Wenn ein Rad vorzüglich in dieser Absicht bey einer Maschine angebracht wird, pflegt man es ein Schwungrad zu nennen.

§. 312. Alle Sätze übrigens, welche das mathematische Rad an der Welle betreffen und vom (§. 284.) an bis zum (§. 296.) vorgetragen und erwiesen sind, können und sollen auch auf die physischen Räder an der Welle angewendet werden. Doch wird bey den letztern die nothwendig hinzukommende Friction und die Störrigkeit der Seile oder Schnuren der Kraft im engen Verstande etwas von dem Vortheile wegnehmen, der am mathematischen Rade, das weder Schwere noch Friction hatte, sich für sie fand.

Erklärungen.

§. 313. Wenn ein physisches Rad an der Welle in ein anderes dergleichen durch unmittelbare Berührung wirken, und es mit sich zum Umlaufe bringen soll; so werden beyde Räder auf mannigfaltige Weise mit sogenannten Zähnen oder Kämmen versehn, vermittelst welcher sie sich angreifen und umtreiben können. Der Raum, welcher zwischen zwey sich nächsten Zähnen an einem Rade frey bleibt, wird eine Zwischentiefe genennt.

§. 314. Strecken sich die Zähne aus der Peripherie des Rades, die man seine Stirne nennen kann, mit ihm in einerley Ebene hervor, und ist jeder, auf beyden Seiten nach den Zwischentiefen hin, oben gleichmäßig abgerundet; so heißt das Rad ein Stirnrad oder auch, weil es wie mit Sternstrahlen versehn ist, ein Sternrad. Stehen dergleichen Zähne nicht auf der Peripherie oder Stirne, sondern auf einer der Seiten von der Radscheibe, nah an ihrem Rande, in einer auf ihr perpendicular gedachten Cylinderfläche; so heißt das Rad ein Kronrad: auch wenn es groß ist und die Zähne mit ihm nicht eben aus einem Stück gearbeitet, sondern eingesetzte und nach bestimmten Regeln abgerundete Pflöcke sind, ein Kammrad. Die Zähne werden dann auch Kammen genennt.

§. 315. Stehn die Zähne eines Rades zwar auf der Stirne, wie bey dem Stirnrade; sind aber nicht, an beyden Seiten nach den Zwischentiefen hin, auf gleiche Art abgerundet, sondern haben vielmehr das Ansehen der Zähne an einer Säge: so nennt man das Rad ein Steigrad. Eben diesen Namen behält es, wenn dergleichen Zähne auf einer seiner Seitenflächen, wie bey dem Kronrade, stehen.

§. 316. Ist an der Achse eines der genannten Räder noch ein kleineres Rad fest angesetzt; so heißt das letztre ein Getriebe, oder Trilling, oder Kumpf von jenem: und zwar ein Getriebe, wenn es wie ein kleiner Cylinder aussieht, in dessen Seitenwand der Länge nach gleichsam Furchen ein-

geschnit-

geschnitten sind; ein Kumpf aber, wenn der Cylinder größer erscheint. Wenn es aus zwey runden Scheiben besteht, zwischen welchen runde Stäbe die Stelle der Zähne vertreten, nennt man es einen Trilling, und jene Stäbe selbst die Triebstöcke.

Anmerkung.

§. 317. Aus der Ansicht von Uhrwerken, Mühlen, oder auch andern bekannten Maschinen, dergleichen zum Beyspiel die eisernen Bratenwender sind, wird man sich leicht deutliche Begriffe von diesen und noch andern Gattungen der Räder erwerben; daß demnach hier die besondre Vorstellung von ihnen in Kupfern vortheilhaft erspart werden kann.

Erklärungen.

§. 318. Jedes Rad bewegt sich, bey seinem Umlaufe um die Achse, im Bezug auf eine Person, die es betrachtet, mit zwey sich entgegen gesetzten Hälften seiner Peripherie auch nach zwey sich entgegengesetzten Richtungen. Denn steht das Rad vertical, und man hält das Auge gegen seine Fläche; so wird die untere Hälfte nach der linken Hand des Anschauenden hin laufen, wenn die obere sich nach seiner rechten bewegt. Liegt das Rad horizontal; so wird die Hälfte, welche nach dem Standorte des Anschauenden zu liegt, nach seiner rechten Hand laufen, wenn die von ihm abgelegene nach seiner linken sich dreht. Der Kürze und Deutlichkeit wegen sind daher die Mathematiker einig geworden, beym verticalen Rade die Richtung des Laufs nur der obern Hälfte gemäß anzugeben; bey dem liegenden aber nur derjenigen Hälfte gemäß, welche von dem Anschauenden weggewandt liegt. Wenn z. E. ein vertical stehendes Rad sich mit der obern Hälfte nach der rechten Hand des Anschauenden dreht; so sagt er: das Rad läuft nach der Rechten.

§. 319. Ein Räderwerk ist eine solche Zusammenordnung einiger Räder, bey welcher immer eins das nächste, auf eine vortheilhafte Art, um die Achse drehen kann.

Zur Erläuterung diene das Räderwerk, welches in (*Fig.* 70.) vorgestellt ist. Hier zeigen sich drey Räder, *a* und *b* und *c*, mit ihren Wellen, *d* und *e* und *f*. Man denke die Zapfen ihrer Achsen horizontal in Pfannen liegend, daß die Räder selbst vertical stehen. Das Rad, *a*, sey ein Stirnrad, seine Welle, *d*, aber ein bloßer Cylinder, um den eine Schnur sich winden läßt, welche an ihm befestigt ist und die Last, *L*, aufwärts ziehen soll. Das Rad, *b*, sey auch ein Stirnrad, aber seine Welle, *e*, sey kein bloßer Cylinder, sondern ein Getriebe oder Trilling, welcher in die Zähne des Rades, *a*, eingreifen kann. Das Rad, *c*, habe an seiner Peripherie keine Zähne, sondern eine Vertiefung umher, in welcher bequem eine in ihr befestigte Schnure abläuft, die das Gewicht, *K*, als Kraft trägt. Die Welle, *f*, dieses Rades, *c*, sey als ein Trilling gearbeitet, welcher in die Zähne des Rades, *b*, eingreift. Bey dieser Einrichtung wird, so bald ein Rad sich dreht, das ganze Räderwerk in Bewegung versetzt werden. Denn man nehme an, daß die Kraft, *K*, stark genug sey, die Last, *L*, zu überwinden; so wird *K* niedersteigen und vermittelst der Schnur, *cK*, das Rad, *c*, sammt seinem Trillinge, *f*, in eine Drehung nach der rechten Hand versetzen. Durch den Trilling, *f*, werden die Zähne des mittlern Rades, *b*, anhaltend aufwärts gedrängt, und dieses Rad, *b*, selbst, sammt seinem Trillinge, *e*, wird nach der linken Hand hin umlaufen. Sein Trilling, *e*, drängt nun die Zähne des Rades, *a*, niederwärts fort, und treibt hiermit dieses Rad, *a*, sammt seiner Welle, *d*, nach der rechten Hand. So wird die Schnur, an welcher die Last, *L*, hangt, auf die Welle, *d*, allmählig gewunden, und *L* selbst aufwärts gehoben.

Die Zähne an den Stirnrädern, *a* und *b*, muß man

in

in der Figur hinzudenken; denn sie sind nicht gezeichnet: und eben so die Triebstöcke an den Trillingen, *e* und *f*.

Zusätze.

§. 320. Man bemerke noch, daß bey einem Räderwerke nicht eben alle Räder mit Zähnen, und alle Wellen mit Getrieben oder Trillingen versehn seyn müssen; sondern nur diejenigen, bey welchen es die Absicht der mitzutheilenden Bewegung erfordert. So bedurften in dem vorhin betrachteten Räderwerke (*Fig.* 70.) nur die Räder, *a* und *b*, der Zähne, aber nicht das Rad, *c*; es waren auch nur die Wellen, *e* und *f*, als Getriebe oder Trillinge einzurichten, aber nicht die Welle, *d*, für welche ein bloßer Cylinder gnügte.

§. 321. Ferner bemerke man an dem betrachteten Räderwerke (*Fig.* 70.) den Umstand, daß immer ein Rad, welches durch seinen Trilling ein zunächst folgendes in Bewegung setzte, im Schwunge eine Richtung nahm, die der Richtung jenes entgegen gesetzt war. Das Rad, *c*, mit seinem Trillinge, *f*, drehte sich nach der Rechten, *b* mit dem seinigen, *e*, nach der Linken, und *a* mit seiner Welle, *d*, wieder nach der Rechten.

Erklärung.

§. 322. Um die folgenden Sätze vom Räderwerke deutlicher zu fassen, stelle man sich jedes Mahl erst die Sache mathematisch vor. Man denke sich nehmlich erst jedes Rad mit seinem Getriebe als ein mathematisches Rad an der Welle, das Rad also als eine mathematische Zirkelfläche, und die Welle als einen mathematischen Cylinder; wie dieses, bey Betrachtung des Rades an der Welle (§. 281 bis 296), auch schon geschehen ist. Wo jetzt bey Rädern, die sich treiben sollen, Zähne und Triebstöcke nöthig sind, da denke man sie entweder unsichtbar klein, daß sie zwar die Möglichkeit der wechselseitigen Umtreibung übrig lassen, im Vergleich mit den Radien der Räder aber eine verschwin-

dende

dende Größe haben; oder man lasse lieber Anfangs die nöthigen Zähne und Triebstöcke ganz weg, und stelle sich ein Getriebe, *f*, (*Fig.* 70), welches ein Nebenrad, *b*, umtreiben soll, nur als einen glatten mathematischen Cylinder, und das umzutreibende Nebenrad, *b*, als eine mathematische Zirkelfläche vor, an welche sich aber das Getriebe, *f*, unmittelbar anschließt. Nun bedarf es nur der Annahme, daß jedes Theilchen des Cylinders, *f*, das sich nach und nach an die Peripherie des Rades, *b*, anlegt, nie für sich allein bey der Umdrehung fortrücke, sonderu immer das nächste Theilchen der letztern mit sich, gleichsam magnetisch, fortbewege: so wird sich alles vollkommen und deutlich erkennen lassen, was hernach bey wirklichen physischen Zähnen und Triebstöcken, wegen mancherley hinzukommender Nebenumstände, unvollkommener und dunkler sich darstellen muß.

Lehrsatz.

§. 323. Wenn bey einem mathematischen Räderwerke auf der einen Seite an der äußersten Welle die Last, auf der andern aber an dem äußersten Rade die Kraft wirkt, und beyde Wirkungen nach Tangenten, in Rücksicht des Räderwerks, einander zuwider geschehen: so verhält sich bey dem Gleichgewichte die Kraft zu der Last, wie das Product aus den Radien der Wellen oder Getriebe zum Product aus den Radien der Räder.

Beweis.

Man denke drey mathematische Räder an Wellen (*Fig.* 71), die überhaupt so eingerichtet und so aufgestellt sind, wie es vom physischen Räderwerke in (§. 319) und (*Fig.* 70) angegeben ward; nur daß gegenwärtig in (*Fig.* 71) die drey horizontalen Achsen nicht wie dort sich in einerley Ebene befinden. Dieser letzte Umstand aber wird in den Wirkungen der Räder nichts ändern können, sondern ist nur der Mannigfaltigkeit des Vortrags wegen angebracht.

Die Last, *L*, (*Fig.* 71) und die Kraft, *K*, denke man physisch, wie dort; die Schnuren aber, woran beyde wirken, als mathematische, biegsame Linien. Hiermit sind die Bedingungen des Lehrsatzes erfüllt. Die Möglichkeit der wechselseitigen Umtreibungen, welche hier bey den Buchstaben *c* und *e*, nöthig ist, stelle man sich so mathematisch vor, wie in (§. 322) angerathen worden ist. Da nun in jedem einzelnen Rade an der Welle vermöge (§. 287) ein Hebel mit verschobenen Armen (§. 119) gedacht werden kann, der auch zugleich ein Winkelhebel seyn darf (§. 289); so können sich hier drey Winkelhebel mit verschobenen Armen finden, nehmlich so viele, als Räder mit Wellen oder Getrieben da sind. So viele finden sich auch hier wirklich. Der erste dieser Hebel ist (*Fig.* 71) *abc*; der zweyte, *cde*; der dritte, *efg*. Immer faßt einer dieser Winkelhebel mit verschobenen Armen den andern, ihm nächsten an, wie bey *c* und *e* zu sehen ist. Die Anfassung geschieht jedes Mahl von den Grenzpuncten der Radien zweyer Peripherien nach der gemeinschaftlichen Tangente, und also unter rechten Winkeln. (S. §. 361) In *a* und *g* wirken die Schwerkräfte, *L* und *K*, auch so. Hiermit sind die Arme der drey Hebel zugleich die Entfernungen der an ihnen wirkenden Kräfte. Von einem zusammengesetzten Hebel nun, an dem die Kräfte unter gegenwärtigen Umständen wirken, ist in (§. 146) erwiesen worden, daß bey dem Gleichgewichte die Kräfte, *L* und *K*, sich gegen einander verhalten, wie die Producte aus den correspondirenden Entfernungen umgekehrt. Das ist, wenn man den (§. 146) mit dem gegenwärtigen vergleicht: die Kraft, *K*, verhält sich in (*Fig.* 71) zur Last, *L*, wie $ab \times cd \times ef$ zu $bc \times de \times fg$. Es sind aber *ab* und *cd* und *ef* die Radien der Wellen oder Getriebe, und *bc* und *de* und *fg* sind die Radien der Räder; demnach verhält sich die Kraft, *K*, zur Last, *L*, wie das Product aus den Radien der Wellen zum Producte aus den Radien der Räder.

Zusätze.

Zusätze.

§. 324. Man nehme, als ein erläuterndes Exempel, das mathematische Räderwerk in (*Fig.* 71) vor sich. Dort sind alle Radien, die zur Berechnung nöthig sind, in gleich große Theile zergliedert. Man nenne einen solchen Theil etwa einen rheinländischen Zoll: so enthält der Radius, ab, der ersten Welle linker Hand drey dergleichen, der Radius, cd, des nächsten Getriebes nur einen, und der Radius, ef, des folgenden zwey Zoll. Die Radien der Räder sind, nach voriger Ordnung: $bc = 7$ Zoll, $de = 6$, und $fg = 5$ Zoll. Das Product aus den Radien der Wellen oder Getriebe ist $= 3 \times 1 \times 2 = 6$. Das Product aus den Radien der Räder aber ist $= 7 \times 6 \times 5 = 210$. Demnach ist, bey

dem Gleichgewichte $K : L = 6 : 210$
oder mit 6 aufgehoben $K : L = 1 : 35$

Die Kraft wirkt also hier fünf und dreyßig Mahl so viel, als sie für sich am Gewichte beträgt.

§. 325. Bey dem physischen Räderwerke gilt die gefundne Wahrheit zwar überhaupt noch; aber die Frictionen der Zapfen in den Pfannen und der Zähne gegen die Triebstöcke, ingleichen die Störrigkeit der Seile, nimmt etwas beträchtliches von dem Vortheile der Kraft weg. Bey den vorhin betrachteten drey Rädern, wenn sie physisch wären, wüßte man zwar gewiß, daß an ihnen ein Loth Kraft nicht mehr als fünf und dreyßig Loth Last bewegen könnte; aber man dürfte nicht erwarten, daß nun diese von jenem wirklich aufgewunden werden würden, so bald man nur dem einen Lothe den geringsten Zuschuß gäb. Der Zuschuß wird gar beträchtlich seyn müssen, ehe Bewegung erfolgt. Wie viel derselbe in jedem Falle betrage, muß durch Erfahrungen ausgemacht werden, durch welche man auch schon zu einiger Kenntniß hiervon gelangt ist, wie in practisch mechanischen Schriften gefunden werden kann. Mathematisch genau ist aber hierüber im Voraus nichts zu bestimmen.

§. 326.

§. 326. Weil bey einem physischen Räderwerke die Zähne und Triebstöcke, bey dem Eingriff in einander und der dann erfolgenden Umdrehung, mit verschiednen ihrer Theile, die weniger oder mehr weit von den Achsen liegen, sich allmählig an einander hinschleifen und hiermit fortdrängen: so bestimmt man die Länge der Radien bey physischen Rädern und Getrieben von der Mittellinie ihrer Achse an etwa bis um das Mittel eines Zahns oder Triebstocks; wenn, wie vorhin, Rechnung über das Räderwerk angestellt werden soll.

§. 327. Wenn nur alles Uebrige, was bey dem Räderwerke bisher vorausgesetzt ward, unverändert bleibt; so hat die Lage der Räderachsen, die bisher immer horizontal war, auf den Hauptsatz in (§. 323.) keinen Einfluß. Ihre Lage kann also auch vertical, oder unter einem schiefen Winkel gegen die Horizontalfläche geneigt seyn. Dann aber werden die Seile oder Schnuren, aL und gK, (*Fig.* 71.) wenn an ihnen Schwerkräfte wirken, über Rollen der ersten Art so geleitet werden müssen, daß sie nach Tangenten an den Radien des Werks, ba und fg, anziehen können. Ferner ist nicht nothwendig, daß die Achsen der Räder insgesammt gegen einander parallel liegen, wie es in (*Fig.* 70 und 71.) zu sehen war; sondern es kann auch das Gegentheil Statt finden. Dieses ward schon bey dem zusammen gesetzten Hebel als möglich gezeigt (§. 153.), und bey Räderwerken kommt es oft vor, z. E. bey dem Kronen- und Steigrade einer gemeinen Taschenuhr.

§. 328. In (*Fig.* 71.) könnte auch das Rad, an welchem die Kraft, K, wirkt, wenn daselbst eine Menschenhand zur Bewegung angewendet werden sollte, ein bloßer Trilling, f, mit einer Kurbel seyn, deren Radius von ihrer Achse an bis zum Angriffspuncte, g, dem Radius, fg, des Rades gleich wär. Die Hand müßte freylich dann, wenn der Vortheil für sie so bleiben sollte, wie er bey dem Gewichte, K, war, auf den Radius der

Kur-

Kurbel stets perpendicular im Umdrehen wirken; und die Kurbel müßte auch nur einen so weiten Umlauf zu machen haben, daß ihm die Hand eines angestellten Arbeiters durchaus folgen könnte.

Aufgabe.

§. 329. Wie bey einem mathematischen Räderwerke, das der Bestimmung in (§. 323.) gemäß angelegt werden soll, die Last für das Gleichgewicht mit der Kraft gefunden werden kann; wenn die letztere, sammt den Radien des Werks, gegeben ist.

Auflösung mit Beweis.

In Bezug auf (*Fig.* 71.) sey gegeben die Kraft, $K = 10$ Loth; die Radien der Wellen, $ab = 3$, $cd = 1$, $ef = 2$; die Radien der Räder, $bc = 7$, $de = 6$, $fg = 5$; sämmtlich in Zollen. Die Last, L, soll gesucht werden.

Man schließe: wie sich verhält das Product aus den Radien der Wellen zum Product aus den Radien der Räder; so muß sich verhalten die gegebene Kraft zur gesuchten Last. (§. 323.)

Das ist, $ab \times cd \times ef : bc \times de \times fg = K : L$

oder, $3 \times 1 \times 2 : 7 \times 6 \times 5 = 10$ L. : L L.

das ist, $6 : 210 = 10 : L$

aufgehoben, $1 : 35 = 10 : L$

demnach ist $L = \frac{35 \times 10}{1} = 35 \times 10 = 350$ Loth.

Zusatz.

§. 330. Wären die Radien des Räderwerks gegeben wie vorhin, und dazu die Last 350 Loth; es sollte aber die Kraft gesucht werden: so dürfte man nur beyde Verhältnisse der dort gebrauchten geometrischen Proportion umgekehrt annehmen, und sagen: Wie sich verhält das Product aus den Radien der Räder zum Product aus

den

den Radien der Wellen; so verhält sich die bekannte Last zur unbekannten Kraft. (§. 323.) Das ist:

$bc \times de \times fg : ab \times cd \times ef = L : K$ (*Fig.* 71.)

oder, $7 \times 6 \times 5 : 3 \times 1 \times 2 = 350$ Loth : K Loth.

Man hebe den ersten und dritten Satz durch 7×5 oder 35 auf, und nehme aus dem zweyten Satze den Factor, 1, der auf seinen Werth keinen Einfluß hat, weg: so entsteht die Proportion:

$6 : 3 \times 2 = 10 : K$

Mit 6 aufgehoben, $1 : 1 = 10 : K$

demnach ist $10 = K$, oder die gesuchte Kraft beträgt 10 Loth.

Aufgabe.

§. 331. Wenn in Rücksicht des Gleichgewichts zweyer Kräfte an einem mathematischen Räderwerke, das der Bestimmung in (§. 323.) gemäß angelegt werden soll, folgende Stücke gegeben sind, als 1) die Anzahl der Räder mit Wellen oder Getrieben; 2) die beyden an ihnen wirkenden Kräfte, einzeln; 3) die Radien der Wellen, auch einzeln; so ist die Frage: wie, dem gemäß, die Radien für die Räder gefunden werden können?

Auflösung mit Beweis.

Es werden drey Räder verlangt. Die Kraft soll 10 Loth, die Last 350 Loth seyn. Für die Radien der drey Wellen oder Getriebe sind gegeben: $ab = 3$ Zoll, $cd = 1$ Zoll; $ef = 2$ Zoll, (*Fig.* 71.) Man mache den Schluß, vermöge (§. 323.), so, daß das noch unbekannte Product aus den Radien der Räder in die letzte Stelle der geometrischen Proportion kommt, indem man sagt: wie sich verhält die Kraft zur Last, so verhält sich das Product aus den gegebenen Radien der Wellen zum unbekannten Product aus den Radien der Räder. Das letzte nenne man indessen P. So ist

10 Loth

10 Loth : 350 Loth = 3 ✕ 1 ✕ 2 : P

das ist 1 Loth : 35 Loth = 6 : P

demnach ist $P = 35 \times 6 = 210$.

Dieses Product für die Radien der Räder zerfälle man nun in seine Factoren

$210 = 21 \times 10 = 7 \times 3 \times 2 \times 5$

Weil man aber nur drey Factoren nöthig hat, indem nur drey Räder seyn sollen; so ziehe man zwey von den vieren, etwa die beyden mittleren, in einen, nehmlich in 6 zusammen. Hiermit sind für die drey Radien der Räder 7 und 6 und 5 Zolle bestimmt. Diese drey Räder kann man nun mit den drey Wellen so verbinden, wie es in (*Fig.* 71.) zu sehen ist; oder auch auf andre Art. Man könnte z. E. eben so wohl dem ersten Rade linker Hand zum Radius 6, dem mittleren 7, und dem dritten 5 Zolle geben. Mathematisch betrachtet, bleibt die Wirkung des Ganzen unverändert. Denn bey ihr kommt es nur auf die Größe der Producte, nicht aber auf die Stellung der Factoren in ihnen an.

Zusatz.

§. 332. Wenn nicht von den Wellen, sondern von den Rädern die Radien gegeben werden, (*Fig.* 71.) als: 7 Zoll, 6 Zoll und 5 Zoll, das übrige aber wie vorhin gesetzt wird: so ist, vermöge des vorigen Paragraphen, der Schluß so einzurichten:

350 Loth : 10 Loth = 7 ✕ 6 ✕ 5 : P

Unter P denkt man nun das gesuchte Product aus den Radien der Wellen oder Getriebe. Diese Proportion geht durch die Aufhebung des ersten und dritten Gliedes mit 35 in folgende über:

10 : 10 = 6 : P

da man sogleich erkennt, daß $P = 6$.

Weil nun zu den drey Wellen drey Radien nöthig sind; so zerfälle man 6 in drey Factoren, nehmlich in 3 ✕ 1 ✕ 2. Man gebe dem Radius, ab, der einen Welle drey Zoll, dem Radius des Getriebes, cd, einen, und dem Radius

des

des Getriebes, *ef*, zwey. Nach dieser Ordnung ist es in der Figur geschehn. Es würde aber auch in einer andern Ordnung richtig seyn, wie gegen das Ende von (§. 331.) gezeigt worden ist.

Aufgabe.

§. 333. Wenn für ein mathematisches Räderwerk, das den Bestimmungen in (§. 323.) gemäß eingerichtet werden soll, Kraft und Last, einzeln genommen, gegeben sind, die Einrichtung des Werkes selbst, in Rücksicht der Radien seiner Räder sowohl, als auch seiner Wellen oder Getriebe, für das Gleichgewicht der Kräfte an ihm zu finden.

Auflösung mit Beweis.

Die gegebene Kraft sey 10 Loth, die gegebene Last 350 Loth. Da nun beym Gleichgewicht die erstre sich zur letztern verhalten muß, wie das Product aus den Radien der Wellen zum Product aus den Radien der Räder (§. 323.); so suche man diese Producte. Dieselben lassen sich in gar verschiednen Zahlen finden. Man kann für sie die gegebenen Zahlen der Kräfte selbst annehmen; hier also 10 und 150. Denn

10 Loth : 350 Loth = 10 : 350.

Hier ist, vermöge (§. 323.), 10 das Product aus den Radien der Wellen, und 350 das Product aus den Radien der Räder. Man zerfälle nun jedes Product in so viel Factoren, als man Räder haben will. Gesetzt, man verlangt derselben zwey; so löse man sowohl 10, als 350 in zwey Factoren auf, als: 10 in 2×5 und 350 in 10×35, und gebe dem Radius der einen Welle zwey beliebige Einheiten, z. E. zwey Viertelszolle, dem Radius der andern fünf dergleichen, dem Radius des einen Rades 10 Viertelszolle, dem Radius des andern 35 dergleichen. Hiermit wird das Räderwerk eingerichtet seyn. Mathematisch gilt es übrigens gleich, welchen von den beyden Radien der Räder man mit dem einen oder dem andern Radius der Wellen zunächst in Verbindung bringen will. Würden

drey

drey Räder verlangt, so wär sowohl 10, als 350 in drey Factoren zu zerfällen; 10 in 5 ⋋ 2 ⋋ 1, und 350 in 10 ⋋ 7 ⋋ 5. Das fernere Verfahren ist aus Vorigem klar. Weil es aber bey mathematischen Rädern, in Absicht des Gleichgewichts zwischen Kraft und Last, nicht auf die Größe der Radien für sich, sondern auf das Verhältniß des Radius jeder Welle zum Radius des ihr zugehörigen Rades ankommt; so kann auch in der vorhin angegebenen Proportion, 10 Loth : 350 Loth = 10 : 350, das zweyte Verhältniß, welches für die Producte aus den Radien gehörte, durch Division oder Multiplication auf mannigfaltige Weise abgeändert werden: wenn nur die Veränderung, der Arithmetik gemäß, so geschieht, daß die Proportion überhaupt richtig bleibt. Man darf also das zweyte Verhältniß 10 : 350, auf eine beliebige Art auch aufheben, z. E. mit Fünf, oder mit Zehen. Im ersten Falle wird seyn: 10 Loth : 350 Loth = 2 : 70; im andern Falle aber: 10 Loth : 350 Loth = 1 : 35. Gesetzt nun, man will das letztre für die Producte der nöthigen Radien bey zwey Rädern beybehalten: so löse man 1 in zwey Factoren, etwa in $2 \bowtie \frac{1}{2}$ oder in 1 ⋋ 1 auf, und 35 in 7 ⋋ 5; so hat man wieder die Größe der Radien nach irgend einer brliebigen Einheit. Würden drey Räder verlangt, so wären sowohl 1, als auch 35 in drey Factoren aufzulösen, 1 = 1 ⋋ 1 ⋋ 1, und 35 = 7 ⋋ 5 ⋋ 1. Das übrige Verfahren ist wie das vorige.

Endlich kann man auch für das eine der beyden unbekannten Producte, z. E. für das Product aus den Radien der Wellen, eine Zahl annehmen, welche man will, als etwa 4, und nun dem (§. 323.) gemäß zu der gegebenen Kraft und Last und dieser angenommenen Zahl die vierte geometrische Proportionalzahl, die indessen y heißen mag, suchen. Diese Zahl, y, wird das Product aus den Radien der Räder seyn. Man schließe demnach:

10 Loth

10 Loth : 350 Loth = 4 : y
aufgehoben, 1 : 35 = 4 : y
Also ist y = 4 × 35 = 140

Verlangt man nun drey Räder; so zerfällt man sowohl 4, als auch 140 in drey Factoren, die erstere in 2 × 2 × 1, die letztre in 7 × 5 × 4, und gewinnt hiermit die nöthigen Radien der Wellen und der Räder, die man nach einer beliebig gewählten Einheit zeichnen kann.

Zusätze.

§. 334. Was im (§. 152.) gezeigt worden ist, daß nehmlich, wenn man eben dieselbe Einheit und eben dieselben Kräfte beybehält, dem zusammengesetzten mathematischen Hebel eine geringere Ausdehnung gegeben werden kann, wenn mehrere Hebel in ihm zusammen wirken, als wenn es wenigere thun: das läßt sich auch hier von dem mathematischen Räderwerke behaupten, wie jeder aus Vergleichung jenes Satzes mit den eben jetzt erklärten Wahrheiten leicht für sich selbst erkennen wird.

§. 335. So lange das Räderwerk bloß mathematisch betrachtet wird, darf man allerdings die Einheit, zur Bestimmung von den Größen der Radien, so klein annehmen, als man nur will, und dem Radius einer Welle oder eines Getriebes nur eine derselben, dem Radius des dazu gehörigen Rades hingegen sehr viele geben. Man darf da auch die Zahl der Räder, die sich treiben sollen, so groß es nur beliebig ist, setzen. Daher kann sehr leicht auf dem Papiere ein mathematisches Räderwerk vorgestellt werden, das bey einer sehr mäßigen Ausdehnung die Kraft millionen- und billionenfach gegen die Last wirksam macht. Denn hier ist bey der feinsten Zartheit der Wellen oder Getriebe weder Verbiegung noch Bruch, und bey der vermehrten Vielheit der Räder an Zapfen und Zähnen keine Friction zu besorgen. Bey physischen Räderwerken aber muß auch auf genugsame Festigkeit ihrer Materie und auf eine zureichende Stärke aller Theile in Rücksicht der zu hebenden Last, wie

nicht

nicht weniger auf die Frictionen der Zapfen in den Pfannen sowohl, als auch der Zähne und Triebstöcke gegen einander, Bedacht genommen werden. Ist die Last, die durch ein physisches Räderwerk bewältigt werden soll, sehr groß; so muß die Materie, aus welcher Räder und Getriebe gearbeitet sind, Eisen oder Stahl seyn. Die Welle, auf welche zunächst die Last wirkt, muß im Radius so groß gewählt werden, daß sie nicht bricht und sich auch nicht verbirgt. Die Zähne und Triebstöcke, die sich, je näher sie einer großen Last liegen, um so viel heftiger gegen einander stämmen, müssen dieses aushalten können, ohne zu zerspringen. Je schwerer die Räder und jemehr ihrer sind, um so vielfacher und stärker werden die Frictionen, welche einen geringern oder größern Theil des Vermögens, das nach mathematischen Berechnungen die Kraft bekommen sollte, wegnehmen. Alle diese Nebenumstände bey physischen Rädern beruhen auf Erfahrungen, und lassen sich aus denselben zwar zureichend, aber doch nicht mathematisch genau voraus bestimmen, wie in größern Werken der Statik und Mechanik gelehret wird. Ist man dieser Erinnerungen eingedenk, so sagt man richtig, daß die gefundnen Wahrheiten bey dem mathematischen Räderwerk auch auf das physische überhaupt anwendbar bleiben.

§. 336. Unter den physischen Räderwerken finden sich mehrere, die von großem, vielfachem Nutzen sind. Man denke an die verschiednen Arten der Mühlen, als Getreidemühlen, Oehlmühlen, Pulvermühlen, Sägemühlen, Papiermühlen, und über dieses an viele Werke, die mit dem allgemeinen Namen der Wasserkünste belegt werden. Zu den letztern gehören nicht nur die im besondern Verstande so genannten Wasserkünste, durch welche das Wasser aus dem Flusse bey einer Stadt gehoben, und unter ihren Gassen hin, vermittelst vieler Röhren, den Häusern der Einwohner zugeführet wird; sondern auch andre, z. E. die Gradirwerke bey Salzsiedereyen. Unter die physischen Räderwerke sind ferner verschiedene Arten der Uhren zu

rechnen,

rechnen, die gewiß zu den kunstreichsten Arbeiten gehören, welche jemahls der menschliche Verstand ersonnen und ausgeführet hat. Die Uhren messen nicht nur durch ihre fortrückenden Zeiger die Zeit nach Stunden, Minuten und Secunden ab; sondern sie können auch den Lauf der Sonne, des Mondes und der Planeten dem Auge darstellen. Sie geben für das Gehör bey Nacht durch Glockenschläge die Stunden und Viertelstunden an; wiederholen auch, wenn man will, einen im Schlaf bereits verhörten Stundenschlag. Sie wecken um die beliebige Stunde vom Schlafe auf. Sie belustigen zu bestimmten Zeiten durch vorgespielte Melodien den Freund der schönen Künste. Bey diesem physischen Räderwerke der Mühlen und Uhren, von so verschiedner Absicht und Einrichtung, wirken nicht immer Schwerkräfte gegen einander, bey welchen zwar der bisherige Vortrag, um nur Leichtigkeit für den Anfänger zu gewinnen, meistentheils stehn geblieben ist, sondern auch Kräfte von andrer Art. Bey der Getreidemühle, z. E. muß, wenn die untern Theile ihrer äußern Räder im Wasser hangen, die bewegende Kraft im Stoße des Wassers gegen die Schaufeln der Räder gesucht werden, die zu bewältigende Last aber in dem Widerstande des aufgeschütteten Getreides gegen den laufenden obern Mühlstein und zugleich in der mehrfachen Friction des ganzen Mühlwerks. Bey der Wanduhr ist die bewegende Kraft in der Schwere der Gewichte zu denken; die Last aber in dem Widerstande des Pendels, welchen dasselbe durch seine Schwankungen gegen das Räderwerk ausübt und in dem stets nöthigen Zuschusse zur Unterhaltung jener Schwankungen, welche sonst ermatten und bald ganz aufhören würden. Bey einer Pendeluhr, die kein Gewicht tragen soll, weil man sie auf einen Tisch stellen will, beruht die bewegende Kraft auf dem Bestreben einer Stahlfeder, sich wieder aufzurollen, wenn sie durch das Aufziehn mit Gewalt zusammengerollt worden ist. Die Last aber stellt man sich wie vorhin bey der Wanduhr vor. Bey der

Taschen-

Taschenuhr, der weder Gewichte noch Pendel nützen würden, liegt die bewegende Kraft in der Hauptfeder, wie bey der vorigen; die Last aber beruht auf den Hindernissen, welche, unter Mitwirkung einer zarten Stahlfeder, die bald vom Steigrade auszuwerfenden, bald in dasselbe wieder einfallenden sogenannten Spindellappen der Bewegung entgegen setzen. Es wirken demnach bey der Wanduhr zwey Schwerkräfte einander entgegen, eine im Gewicht, eine in der Hinundwiederschwingung des Pendels; bey der Tischuhr aber eine Federkraft und eine Schwerkraft in der Pendelschwingung; bey der Taschenuhr endlich vornehmlich zwey Federkräfte. Bey dem Schlag- und Weckerwerke einer Uhr wird man nun selbst im Stande seyn, sich Kraft und Last zureichend deutlich vorzustellen.

§. 337. Die vorhin angeführte Wanduhr bemerke man zugleich als ein Exempel von dem Umstande, daß bey manchen physischen Räderwerken die Kraft an einer Stelle angebracht wird, an welcher, wenn zwey Gewichte gegen einander wirken sollten, die Last angebracht seyn würde. Denn bey den drey Rädern (*Fig.* 71.) wirkte die Last, *L*, an der Welle, *a b*, und die Kraft, *K*, an dem Rade, *f g*. Machten aber jene drey Räder eine Wanduhr aus; so würde an der Welle, *a b*, die Kraft des Zuggewichts angebracht seyn, am Rade, *f g*, hingegen würde sich der Widerstand des Pendels, das ist die Last, zeigen. Warum bey der Wanduhr die Sache umgewandt erscheint, ist aus den Gründen der Uhrmacherkunst zu erklären, die für gegenwärtigen Vortrag nicht gehören. Es ist jetzt genug, einen solchen Fall bemerkt zu haben.

Lehrsatz.

§. 338. Wenn zwey mathematische Räder, welche einander, so wie es im (§. 322.) angegeben ist, bey unmittelbarer Berührung umtreiben können, gleichgroße Radien haben: so vollenden beyde zugleich jeden vollen Umlauf um ihre Achsen.

Beweis.

Beweis.

Sind die Radien gleich, so sind es auch die Peripherien; und die letztern haben demnach gleichviel möglichkleinste Theilchen. Für den Anfang der Peripherien nehme man den gemeinschaftlichen Berührungspunct beym Stillestande an. Erfolgt nun die Bewegung, so wird immer ein kleinstes Theilchen der einen Peripherie ein eben solches, das der andern gehört, mit sich fortführen; und wegen Gleichheit der Peripherien muß, sobald das erste kleinste Theilchen der einen wieder an den Berührungspunct kommt, auch das erste kleinste Theilchen der andern wieder an denselben gelangen. Beyde Räder werden demnach immer zugleich eine volle Wendung um die zugehörigen Achsen vollenden.

Lehrsatz.

§. 339. Wenn zwey mathematische Räder, die sich wie die vorigen umtreiben, ungleich große Radien haben: so giebt der Quotient, welcher aus der Division des kleinern Radius in den größern entspringt, die Zahl der vollen Umläufe an, welche das kleinre Rad bey einem einzigen Umlaufe des größern vollbringt.

Beweis.

Sollen zwey Räder mit ungleich großen Radien gedacht werden; so müssen auch ihre Peripherien ungleich groß angenommen seyn. Man setze demnach zwey Räder, deren größeres eine zwey Mahl größere Peripherie hat, als das kleinere. Das erstre wird nun auch in seiner Peripherie zwey Mahl so viel möglichkleinste Linientheilchen enthalten, als in der Peripherie des letztern liegen. Wenn, nach erregter Bewegung, das erste Theilchen der kleinern Peripherie wieder in den gemeinschaftlichen Berührungspunct (§. 338.) gelangt; so kann von der größern da erste Theilchen in demselben noch nicht wieder angekommen

seyn;

seyn; denn es ist nur erst die Hälfte ihrer Theilchen bey ihm durchgeführt. (§. 338.) Um die andre Hälfte auch durchzuführen, muß das erste Theilchen der kleinern Peripherie noch ein Mahl an den Berührungspunct kommen. Sie geht also mit allen ihren Theilchen zwey Mahl durch denselben, indeß die doppelt größre mit den ihrigen nur ein Mahl durch ihn gegangen ist. Das heißt: wenn von zwey Rädern, die sich treiben, das eine eine zwey Mahl größere Peripherie hat als das andre; so wendet sich die kleinere, bey einer einzigen vollen Wendung der größern um die derselben zugehörige Achse, zwey Mahl um die ihrige.

Man wird nun leicht einsehn, daß, wenn die Peripherie des einen Rades fünf Mahl so groß ist, als die Peripherie des andern, die letztere fünf volle Wendungen um ihre Achse macht, indem die erstere nur eine um die ihrige vollbringt. Der Satz ist demnach allgemein: bey zwey Rädern, die sich treiben, verhält sich die Anzahl der Umläufe des kleinern zu einem einzigen Umlaufe des größern, wie des letztern Peripherie zur Peripherie des erstern; oder auch, wie der Radius des letztern zum Radius des erstern. (G. §. 439.) Die kleinere Peripherie nenne man p, die größere P. Der erstern Radius sey r, der letztern R. Ein voller Umlauf der größern sey 1; die Anzahl der Umläufe, die von der kleinern, bey einem einzigen Umlaufe der größern, vollendet werden, heiße y; so ist

$$p : P = 1 : y$$

und weil $p : P = r : R$ (G. §. 439.)

so ist auch $r : R = 1 : y$

demnach ist $$y = \frac{R \times 1}{r} = \frac{R}{r}$$

Das heißt: der Quotient aus der Division des größern Radius durch den kleinern giebt an, wie viel Mahl die Peripherie des kleinern Rades, und also auch das kleinere Rad selbst, sich vollkommen um die Achse wendet; indem die Peripherie des größern, und also auch das größere Rad selbst, nur eine volle Wendung um die Achse vollbringt.

Anmer-

Anmerkung.

§. 340. Zur Erläuterung des bisherigen Vortrags nehme man (*Fig.* 71.) vor sich. Dort sind drey mathematische Räder an Wellen, von welchen letztern aber die beyden, *d* und *f*, als Getriebe gedacht werden sollen, vorgestellt, und treiben einander. Man behalte nur erst das mittlere Rad, *d*, und das zur linken Hand, *b*, im Auge. Das erstere soll das letztere umtreiben. Der Umtrieb wird durch des mittlern Getriebe, *c d*, bewirkt, welches bey dem Puncte, *c*, die Peripherie, *c h*, des linker Hand liegenden Rades angreift, und zwar ohne Zähne und ohne Triebstöcke, auf die Art, welche in (§. 322.) gezeigt ist. Hier sind nun die Peripherien der einander treibenden beyden Räder in der Peripherie des Getriebes, *d c*, und in der Peripherie, *c h*, des Rades, *b*, zu denken. Die Radien aber, auf welche man zu achten hat, sind *d c* und *b c*. Da, der Figur gemäß, der Radius, *b c*, sich zum Radius, *d c*, verhält wie Sieben zu Eins; so wird das Getriebe, *d c*, sieben volle Wendungen um seine Achse, *d*, vollenden, indem das Rad, *b c h*, nur eine um die seinige, *b*, vollbringt. (§. 339.) Betrachte man ferner die beyden Räder an Wellen, *d e* und *f g*, für sich allein, die sich bey dem Puncte, *e*, angreifen und treiben; so faßt man die Radien, *f e* und *d e*, in das Auge. In der Figur verhält sich der erstre zum letztern, wie Zwey zu Sechs, oder wie Eins zu Drey. Das Getriebe, *e f*, zugleich mit seinem Rade, *f g n*, wird nach (§. 339.) drey volle Wendungen um seine Achse, *f*, machen, indem das Mittelrad, *d e m*, zugleich mit seinem Getriebe, *d c*, nur eine dergleichen um seine Achse, *d*, vollbringt.

Erklärung.

§. 341. Wenn bey einem physischen Räderwerke ein Getriebe ein Rad an seiner Peripherie unmittelbar angreifen und um dessen Achse treiben soll; so müssen an den

Peri-

Peripherien von beyden erhabne und vertiefte Theile, das ist, Zähne mit Zwischentiefen, und Trillingsstöcke oder ihnen gleichgeltende Erhabenheiten mit Zwischenräumen abwechselnd angebracht seyn, damit der Angriff wirklich und sicher und stark genug werden könne. Am Getriebe nun, das in ein Rad greifen soll, müssen die Trillingsstöcke sowohl, als ihre Zwischenräume für die Zähne und Zwischentiefen des Rades einander angemessen seyn, und so viel Mahl kleiner die Peripherie des Trillings als die Peripherie des von ihm anzugreifenden Rades ist, so viel Mahl weniger Trillingsstöcke als Radzähne werden auch erfordert.

Zusatz.

§. 342. Daher folgt, daß die Zahlen jener Stöcke und dieser Zähne sich gegen einander verhalten wie die Größen der Peripherien, zu welchen sie gehören, oder auch wie die Radien dieser Peripherien. Gesetzt nun, ein Trilling habe 5 Stöcke, das von ihm angegriffene Rad habe 30 Zähne; so sage man, 5 in 30 habe ich sechs Mahl: hiermit wird man wissen, wie aus Vergleichung der Peripherien oder Radien, daß der Trilling jedes Mahl sechs Wendungen um seine Achse machen muß, wenn das Rad nur eine einzige vollbringt.

Erklärung.

§. 343. In einem Räderwerke nennt man dasjenige Rad das langsamste, bey dessen einer vollen Wendung um seine Achse jedes der übrigen mehrere Wendungen um die seinige vollbringt. Dasjenige heißt das schnellste, das die mehresten Umwendungen bey einer einzigen des langsamsten macht. So ist im Räderwerke (*Fig.* 71.) vermöge (§. 340.) das Rad, *bac*, sammt seiner Welle das langsamste; hingegen das schnellste ist das Rad, *fgn*, nebst seinem Getriebe.

Lehrsatz.

§. 344. Wenn ein mathematisches Räderwerk aus mehr als zwey Rädern besteht, übrigens aber nach der Vorstellung in (§. 340.) eingerichtet ist; so wird das schnellste Rad, bey einer einzigen vollen Wendung des langsamsten um seine Achse, so viele Wendungen um die eigne vollbringen, als der Quotient Einheiten enthält, welcher durch die Division des Products aus den Radien der angreifenden Getriebe in das Product aus den Radien der angegriffenen Räder entspringt.

Beweis.

Das Werk (*Fig.* 71.) bestehe aus drey Rädern, *h* und *m* und *n*, deren eines, nehmlich, *h*, eine bloße Welle, *b*, hat, zwey aber, *m* und *n*, mit Getrieben, *d* und *f*, versehen sind. Diese beyden Getriebe greifen in die Räder, *m* und *h*, in den Puncten, *e* und *c*. Das Rad, *h*, mit seiner Welle, *b*, ist das langsamste; aber *n* mit seinem Getriebe, *f*, ist das schnellste. Das Getriebe, *f*, dessen Radius, *fe*, 2 Zoll ist, treibt das Rad, *m*, das zum Radius, *de*, 6 Zoll hat, um, und macht also, nebst seinem Rade, *n*, bey einer Wendung des Rades, *m*, $\frac{6}{2}$ (§. 339.), das ist, drey Wendungen. Das Getriebe, *d*, dessen Radius, *dc*, ein Zoll ist, greift das Rad, *h*, an, welches zum Radius, *bc*, 7 Zoll hat; und macht, bey einer Umwendung desselben $\frac{7}{1}$ (§. 339.) das ist, 7 Umwendungen. Demnach sind der Umwendungen, die das schnellste Rad, *n*, bey einer einzigen des langsamsten, *h*, macht, $\frac{6}{2} \times \frac{7}{1}$ oder $\frac{6 \times 7}{2 \times 1}$ oder $\frac{42}{2}$ oder $\frac{21}{1}$ oder 21. Man betrachte nun unter den Ausdrücken des gefundnen Quotienten den zweyten, nehmlich diesen, $\frac{6 \times 7}{2 \times 1}$. Aus ihm ersieht man, daß der Quotient, welcher durch die Division des Products aus den Radien der angreifenden Getriebe in das Product aus den Radien der angegriffenen Räder erhalten wird, die Anzeige giebt, wie viel Wendungen das schnellste Rad bey einer einzigen

des

des langsamsten macht. Dieser Beweis ist leicht als allgemein zu erkennen; die Radien mögen von jeder beliebigen Länge, und die Anzahl der Räder mag so groß seyn, als man will.

Zusatz.

§. 345. Bey einem physischen Räderwerke kann man auch, vermöge (§. 342.), die Anzahl der Umläufe des schnellesten Rades bey jedem einzelnen des langsamsten dadurch finden, daß man zwey Producte macht; das eine aus den einzelnen Zahlen der Stöcke in jedem angreifenden Trillinge, das andre aus den einzelnen Zahlen der Zähne an jedem angegriffenen Rade, und dann das erstre in das letztre dividirt.

Anmerkung.

§. 346. Es sey, z. B. in (*Fig.* 71.) *ef* ein Trilling mit 6 Stöcken; das von ihm angegriffene Rad, *m*, dessen Radius, *de*, drey Mahl größer ist, als der Radius, *fe*, des Trillings, habe 18 Zähne. (§. 341.) Der Trilling, *dc*, sey mit 5 Stöcken versehn, und das von ihm angegriffene Rad, *h*, dessen Radius, *bc*, das siebenfache des Radius, *dc*, ist, mit 35 Zähnen. (§. 341.) Demnach ist das Product aus den einzelnen Zahlen der Stöcke eines jeden Trillings 5×6; das Product aus den einzelnen Zahlen der Zähne eines jeden angegriffenen Rades ist 35×18. Also entsteht aus der Division des letztern Products durch das erstre der Quotient

$$\frac{35 \times 18}{5 \times 6}$$

Wenn 35 in die Factoren, 5×7, und 18 in die Factoren, 3×6 zerfällt wird, verwandelt er sich in folgenden

$$\frac{5 \times 7 \times 3 \times 6}{5 \times 6}$$

Wird oben und unten mit 5×6 aufgehoben, so kommt 7×3 das ist, 21. Auf diese Weise findet man, wie vorhin in

(§. 344.), daß das schnellste Rad, *n*, mit seinem Trillinge, *f*, 21 Umläufe vollendet, wenn das langsamste, *h*, mit seiner Welle, *b*, erst einen vollbracht hat.

Zusatz.

§. 347. Da man den obigen Quotienten, $\frac{35 \times 18}{5 \times 6}$, auch gleichgeltend auf folgende Art schreiben kann, $\frac{35}{5} \times \frac{18}{6}$ (A. §. 150.); so erhellt, daß man den vorigen Endzweck ebenfalls erreichen muß, wenn man die Zahl der Stöcke des schnellsten Trillings, nehmlich 6, in die Zahl der Zähne des angegriffenen Rades, nehmlich 18, dividiret, da man zum Quotienten, 3, bekommt; alsdann bey dem zweyten Trillinge und dem von ihm angegriffenen Rade auch so verfährt, da man den Quotienten, 7, erhält; hierauf aber beyde Quotienten, 3 und 7, mit einander multiplicirt. Man findet wie vorhin nothwendig auch die Zahl 21.

Diese Art zu verfahren kann auch bey dem Satze in (§. 144.) außer der dort angegebenen angewendet werden.

Aufgabe.

§. 348. Die Einrichtung eines physischen Räderwerks in Rücksicht der Räderzahl sowohl, als auch in Rücksicht der Anzahl von Zähnen an den Rädern und von Stöcken in den Trillingen anzugeben; wenn bestimmt wird, wie viel volle Wendungen das schnellste Rad, bey einer einzigen des langsamsten, machen soll.

Auflösung.

Gesetzt, es wird verlangt, daß das schnellste Rad, bey einer Wendung des langsamsten, 160 Wendungen mache; und man will zwey Trillinge und zwey Räder, die von ihnen angegriffen werden, für das Werk angeben: so zerfälle man die gegebene Zahl, 160, ebenfalls in zwey Factoren, etwa in 16×10. Jedem der beyden Trillinge gebe man eine mäßige Anzahl Stöcke; dem schnellsten etwa 5, dem andern 6. Die Stärke, die den Trillingen selbst in

ihrem

ihrem Diameter zu geben ist, muß aus der mehrern oder mindern Festigkeit der Materie, woraus das Werk gearbeitet wird, beurtheilt werden, und zugleich aus der Stärke der Kräfte, die an ihm thätig seyn sollen. Dem einen Rade, in welches der schnellste Trilling eingreifen soll, theile man dem einen gewählten Factor, 10, gemäß, zehen Mahl so viel Zähne zu, als der Trilling Stöcke hat, das ist, 5 × 10 oder 50. Folglich (§. 342.) wird man auch den Radius dieses Rades zehen Mahl größer nehmen müssen, als den Radius des eingreifenden Trillings. Dem andern Rade, in welches der andre Trilling mit 6 Stöcken eingreifen soll, ertheile man, dem andern gewählten Factor, 16, gemäß, sechzehen Mahl so viel Zähne, als dieser Trilling Stöcke hat, das ist, 6 × 16 oder 96. Vermöge (§. 342.) wird man also auch den Radius dieses andern Rades sechzehen Mahl so groß nehmen müssen, als der Radius des in ihn greifenden Trillings genommen ist. Die beyden Räder übrigens sollen Sternräder seyn.

Vermittelst (*Fig.* 70.) mache man sich von dem, was jetzt gesagt ward, eine deutlichere Vorstellung; doch nur in Rücksicht der Verbindung von den angezeigten Trillingen und Rädern, nicht aber in Rücksicht des Verhältnisses ihrer Radien gegen einander. Denn das letztre ist in der Figur nicht ausgedrückt. Man denke sich also den schnellsten Trilling mit 5 Stöcken in *f*; das von ihm angegriffene Sternrad mit 50 Zähnen in *b*. Den zweyten Trilling mit 6 Stöcken denke man in *e*, und das von diesem umgetriebene Sternrad mit 96 Zähnen in *a*. Nach Beschaffenheit der Absichten nun, die das Räderwerk hat, kann der schnellste Trilling, *f*, an seiner Achse noch ein Rad ohne Zähne, *c*, oder eine Kurbel bekommen, und an der Achse des langsamsten Rades, *a*, kann bey *d* noch eine Welle, wie sie etwa die Umstände erfordern, angebracht werden. Genug, es bleibt dabey, der Trilling, *f*, wird mit einem Rade, *c*, oder einer Kurbel an seiner Achse 160 Wendungen machen,

chen, indem das langsamste Rad, *a*, mit der ihm zugegebenen Welle, *d*, nur eine vollführt.

§. 349. Wenn man aber dem Werke drey Trillinge und eben so viele Räder, in welche jene eingreifen, zutheilen will; so zerfälle man die gegebene Zahl, 160, gleichfalls in drey Factoren, etwa in 8 × 5 × 4. Dem schnellsten Trillinge gebe man 5 Stöcke, jedem der beyden übrigen aber 6. So wird, vermöge der jetzt gewählten drey Factoren und vermöge der vorigen Regeln in (§. 348.), das Rad, in welches der schnellste Trilling greift, 5 × 4 oder 20 Zähne bekommen; das zweyte würde deren 6 × 5 oder 30 erhalten, und das dritte, langsamste endlich 6 × 8 oder 48. Wollte man dem Räderwerke vier angreifende Trillinge und vier angegriffene Räder geben; so zerfällte man die gegebene Zahl, 160, in vier Factoren, 5 × 4 × 4 × 2, und handelte ferner nach den bereits erläuterten Regeln.

Beweis.

§. 350. Vermöge (§. 345.) ist die Zahl der Umläufe des schnellsten Rades oder auch Trillinges, bey einem einzigen Umlaufe des langsamsten, dem Quotienten gleich, welcher durch die Division des Products aus den einzelnen Zahlen der Stöcke in den angreifenden Trillingen, in das Product aus den einzelnen Zahlen der Zähne an den angegriffenen Rädern, gefunden wird. Nun war im Haupttheile der Auflösung (§. 348.) das erste Product 5 × 6, das zweyte 5 × 10 × 6 × 16. Der aus Division des zweyten durch das erste entspringende Quotient ist also $\frac{5 \times 10 \times 16 \times 6}{\times 6}$. Dieser Quotient aber, der auch wie ein unächter Bruch betrachtet werden kann, ist vermöge der Regeln, die in der Auflösung vorgeschrieben wurden, nothwendig den Factoren, 10 × 16, gleich, in welche die gegebene Zahl, 160, zerfällt worden war. Denn das Product aus diesen Factoren selbst liegt in dem Zähler, und ist mit einem und demselben andern Producte, nehmlich mit 5 × 6,

sowohl

sowohl multiplicirt als dividirt; daß demnach der Quotient, $\frac{5 \times 10 \times 6 \times 16}{\times}$, den Factoren, 10 × 16, das ist der gegebenen Zahl, 160, gleich seyn muß. Die Auflösung für den ersten Fall in (§. 348.) ist demnach richtig. Daß sie es auch für die übrigen Fälle in (§. 349.) sey, läßt sich nun leicht auf vorigem Wege erweisen. Der Beweis ist allgemein.

Anmerkung.

§. 351. Auf dem Umstande, daß bey Rädern, die sich treiben, in der Zeit, da eines von ihnen sich nur ein Mahl um seine Achse wendet, die übrigen mehrere Umläufe vollbringen, und darauf, daß man genau vorher bestimmen kann, wie viel Mahl dieses oder jenes Rad bey einem Umlaufe des langsamsten sich um seine Achse wenden wird, beruht in den Uhren, Mühlen und andern mechanischen Kunstwerken ein Haupttheil ihrer Ordnung und Brauchbarkeit. Denn bey der Wanduhr ist es ja nöthig, daß das Rad, welches vom Gewichte unmittelbar getrieben wird, viel langsamer sich bewegt, als dasjenige, in welches das Pendel zunächst seine Wirkung äußert. Eben so muß in der Taschenuhr das Schneckenrad, welches auf seiner conischen Welle die Kette nach Windungen trägt, die dem innern Gange eines Schneckenhauses ähnlich sind, viel langsamer sich wenden, als dasjenige, welches die sogenannten Lappen der hin und wieder beweglichen Spindel hier einnimmt, dort auswirft. Denn wär dieses nicht, so müßten beyde Arten der Uhren zur größten Unbequemlichkeit weit öftrer aufgezogen werden, als es nun vermöge jener Einrichtung nöthig ist. Andrer Absichten dabey jetzt zu geschweigen. Auch bey der Getreidemühle muß der laufende Mühlstein, wenn er gut mahlen soll, bey einer Wendung des Wasserrades, oder bey einem Umschwunge der Windmühlenflügel, mehrere Wendungen um seine Achse vollbringen, u. s. w.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 352. Wenn an einem Räderwerke Last und Kraft bey dem Gleichgewichte nach Tangenten wirken; so verhält sich, sobald Bewegung erfolgt, der natürliche sowohl als der mechanische Weg der Kraft, nebst ihrer Geschwindigkeit, zu diesen drey Umständen bey der Last, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte.

Beweis.

In (*Fig.* 71.) ist ein solches Räderwerk dargestellt, an welchem die Last, L, und die Kraft, K, gegen einander bey a und g nach Tangenten wirken. Es macht vermöge (§. 344.) der schnellste Trilling, f, bey einem Umlaufe der Peripherie, h, des langsamsten Rades, so viele volle Wendungen, als der Quotient, $\frac{bc \times de}{dc \times fe}$, Einheiten enthält. Da das Rad, ng, mit dem schnellsten Trillinge, fe, einerley Achse hat, und die Welle, ba, mit dem langsamsten Rade, hc, sich auch an einerley Achse befindet; so folgt, daß auch die Peripherie, ng, des schnellsten Rades, bey einer einzigen Umwendung der langsamsten Welle, ba, so viele Umläufe vollbringt, als der Quotient $\frac{bc \times de}{dc \times fe}$ Einheiten anzeigt. Nun ist der natürliche Weg der Kraft, K, bey jedem vollen Umlaufe der Peripherie, ng, eben dieser Peripherie gleich, weil sich dann die Schnure, gK, von derselben ein Mahl in der Tangente bey g abgewickelt hat. Eben so ist der natürliche Weg der Last, L, bey einem Umlaufe der langsamsten Welle, ba, ihrer Peripherie gleich; denn auf sie hat sich denn die Schnure, aL, ein Mahl gewickelt. Demnach verhält sich der natürliche Weg der Kraft, K, zum natürlichen Wege der Last, L, bey jedem vollen Umlaufe der Welle, ba, wie die Peripherie, ng, so viel Mahl genommen, als der Quotient, $\frac{bc \times de}{dc \times fe}$, Einheiten an-

anzeigt, zu der Peripherie der Welle, ba. Das ist, weil die Peripherien der Zirkel sich wie ihre Radien verhalten; der natürliche Weg der Kraft, K, verhält sich, bey jedem einzelnen Umlaufe der Welle, ba, zum natürlichen Wege der Last, L, wie $\frac{bc \times de}{dc \times fe} \times fg$ zu ba, oder wie $\frac{bc \times de \times fg}{dc \times fe}$ zu ba.

Nun verhält sich aber, vermöge (§. 323.), bey dem Gleichgewichte, die Last zur Kraft, $bc \times de \times fg$, zu dem Producte, $ba \times dc \times fe$. Das ist:

$$L : K = bc \times de \times fg : ba \times dc \times fe$$

Man dividire jedes Glied des letzten Verhältnisses durch $dc \times fe$; so ist (A. §. 266.)

$$L : K = \frac{bc \times de \times fg}{dc \times fe} : \frac{ba \times dc \times fe}{dc \times fe}$$

und daher $L : K = \frac{bc \times de \times fg}{dc \times fe} : ba$

Demnach verhält sich der natürliche Weg der Kraft, K, bey jedem einzelnen Umlaufe der Welle, ba, zum natürlichen Wege der Last, L, wie die Last, L, zur Kraft, K. Und da hier offenbar eben so, wie es bey dem einfachen Rade in (§. 295.) gezeigt worden ist, die mechanischen Wege mit den natürlichen einerley sind; so verhalten sich auch jene wie diese. Die Geschwindigkeiten der beyden Kräfte, K und L, verhalten sich eben so, indem die Wege von ihnen in gleicher Zeit durchgangen werden.

Erklärung.

§. 353. Es kommen auch bey mechanischen Werken zuweilen sogenannte Seilräder vor; das sind solche, welche nicht durch Zähne und Getriebe unmittelbar einander angreifen und umtreiben, sondern dieses vermittelst eines Seiles oder einer Schnure thun, welche um die Peripherien von beyden straff gelegt und mit den Enden zusammen geknüpft ist.

Zusätze.

§. 354. Man nehme das Spinnrad, Seiler- und Scherenschleiferrad in die Gedanken; so wird man sich von der Einrichtung solcher Seilräder einen zureichenden Begriff machen können. Auch die Zeichnung in (*Fig.* 72.) wird dazu dienen. In ihr sey *ab* ein Rad, das bey *c* anstatt der gewöhnlichen Welle eine Kurbel hat. Um seine Peripherie sey eine, an ihren beyden Enden zusammengeknüpfte Schnur, *abde*, so gelegt, daß sie zugleich die Welle, *de*, eines andern Rades, *fg*, umfaßt. Wird nun die Kurbel, *c*, umgedreht, daß das Rad, *ab*, in den Lauf kommt; so führt es die Schnure über seiner Peripherie fort, und treibt durch sie die Welle, *de*, und zugleich das mit derselben an einer Achse befindliche Rad, *fg*, herum. Da aber auf diese Weise mit jedem kleinsten Theilchen der Peripherie des Rades, *ab*, ein eben so kleinstes Theilchen der Wellenperipherie, *de*, fort bewegt wird, wie bey den bisher betrachteten Rädern: so muß auch hier die Welle, *de*, mit dem an ihr befestigten Rade, *fg*, bey einem Umlaufe des Rades, *ab*, so viele Wendungen um ihre Achse machen, wie viel Mahl die Peripherie der Welle, *de*, in der Peripherie des Rades, *ab*, enthalten ist, oder wie viel Mahl der Radius der Welle, *de*, im Radius des Rades, *ab*, liegt. So lassen sich mehrere Sätze, die bey den gezahnten Rädern betrachtet und bewiesen worden sind, auf solche Seilräder leicht anwenden.

§. 355. Seilräder, wo sie angebracht werden können, gewähren den Vortheil, daß sie in beträchtlicher Entfernung von einander sich noch treiben, daß sie weniger mühsam auszuarbeiten, und daher für geringre Preise zu erhalten sind, als die gezahnten; daß ihr Gang leiser als bey jenen von Statten geht, weil das Rasseln der Zähne und Getriebe gegen einander wegfällt, und daß sie auch nicht so bald unbrauchbar werden wie jene, an denen sich die Zähne leicht abnutzen, da die Seilräder nur eine neue Schnur erfor-

fordern, wenn die erste unhaltbar geworden ist. Allein, wo ein genau bestimmtes Verhältniß in den Geschwindigkeiten der Wendungen mehrerer Räder gegen einander nöthig ist, oder wo Räder von großen Lasten angestrengt werden sollen, da behalten die Räderwerke mit Zähnen und Getrieben allerdings den Vorzug, wie sich leicht aus den bekannten Umständen, denen Seile und Schnuren unterworfen sind, beurtheilen läßt.

§. 356. Da die Schnuren um solche Seilräder leicht, durch ihre Drehung oder durch die Trockenheit der Luft, schlaff werden, und dann nicht gehörig wirken: so ist es rathsam, daß eins von dem andern, so bald man will, durch ein leichtes Nebenmittel, etwa durch eine Schraube, etwas abgerückt werden kann. Denn dadurch läßt sich die Schnure sogleich wieder straff spannen.

Erklärungen.

§. 357. Ein mathematischer, bey *b* (*Fig.* 73.) rechtwinkliger Triangel, *abc*, befinde sich aufwärts in der Verticalfläche einer seiner Seiten, *ab*, welche am rechten Winkel in horizontaler Richtung liegt. Die Hypotenuse desselben wird eine schiefe Linie (linea inclinata) in engem Verstande genennt, *ab* aber ihre Grundlinie, und *bc* ihre Höhe. Stellt man dann auf die Hypotenuse, *ac*, eine ebene Fläche, etwa ein Rectangel, so, daß sie auf der Fläche des Triangels perpendicular steht, so heißt sie eine schiefe Fläche (planum inclinatum) in engem Verstande; *ac* wird dann ihre Länge genennt; *ab* und *bc* behalten, in Rücksicht auf sie, die bereits angegebenen Namen. Die Schiefe der Linie oder Fläche wird nach dem Winkel, *bac*, ermessen. Uebrigens werden die Linien des Triangels, *abc*, ingleichen die schiefe Fläche als unbiegsam und undurchdringlich angenommen; wie man dieses schon bey dem mathematischen Hebel gethan hat.

§. 358. Wenn aber in einem solchen rechtwinkligen Triangel keine von den Seiten, die den rechten Winkel

ein-

einschließen, horizonntal liegt; so wird gleichwohl auch die Hypotenuse eine schiefe Linie, aber im weiten Verstande, genennt: und es muß dann jedes Mal diejenige Linie angegeben werden, in Rücksicht welcher jene als schief betrachtet wird. Eben so giebt es eine schiefe Fläche im weiten Verstande, und sie muß auf gleiche Weise jedes Mahl bestimmt werden.

Anmerkung.

§. 359. Im Fortgange dieses Vortrags ist jederzeit die schiefe Linie und Fläche im engen Verstande (§. 357.) gemeint, wenn diese Namen schlechthin stehn; wo man sie aber im weiten Verstande (§. 358.) nehmen soll, wird es ausdrücklich durch einen Beysatz angezeigt werden.

Lehrsatz.

§. 360. Wenn auf einer mathematischen schiefen Linie, *b c*, (*Fig.* 74.) ein physischer Körper als Last, *L*, vom Heruntergleiten durch die Gegenwirkung einer Kraft, *K*, deren Richtung, *v m*, mit der schiefen Linie selbst parallel ist, abgehalten werden soll; so muß sich die Kraft zur Last verhalten, wie die Höhe, *a c*, der schiefen Linie zu ihrer Länge, *b c*.

Beweis.

Auf die schiefe Linie, *b c*, (*Fig.* 74.) sey als Last der physische Würfel, *L*, so gelegt, daß der Mittelpunct seiner Schwere, *v*, in die Verticalfläche der Grundlinie, *b a*, und hiermit auch in die erweiterte Fläche des Triangels, *a b c*, gebracht ist; so wird der Körper seitwärts vom Triangel nicht herabfallen können. Damit er aber auch von der Herabgleitung auf der schiefen Linie nach *b* hin abgehalten werde; so denke man im Puncte, *v*, eine mathematische, biegsame Linie, *v m*, befestigt, die mit *b c* parallel fortgeführt, bey *m* über eine mathematische Rolle geschlagen und in *K* mit einem Gewichte versehn ist, welches eben die Kraft

seyn

seyn soll, wodurch die Last, L, an ihrem Orte erhalten wird. Alles Gewicht dieser Last denke man im Mittelpuncte der Schwere, v, des Würfels, L, vereinet (§. 73.); daß also der Punct, v, an Schwere dem Würfel, L, gleich ist, und beyde für einander, in dieser Rücksicht gleichgeltend, gesetzt werden können. Die Materie des Würfels ist nun gleichsam verschwunden. Damit aber der Punct, v, in derjenigen Entfernung von der schiefen Linie bleibt, welche seine Lage im Körper mit sich brachte; so denke man ihn als obern Grenzpunct der mathematischen Linie, vn, welche perpendicular auf bc gestellt ist. Diese Perpendiculare sehe man als einen einarmigen Hebel an. (§. 120.) In n ist sein Ruhepunct; die Last, L, in v wirkt als Schwerkraft perpendicular gegen die Horizontallinie, ba, nach der Richtung, vo, und ihre Entfernung vom Ruhepuncte, n, ist die aus ihm auf vo gestellte Perpendiculare, ns. Die an diesem Hebel wirkende Kraft, K, hat die Richtung, vm, und ihre Entfernung vom Ruhepuncte, n, ist aus ihm die Perpendiculare auf vm, das ist, die Länge des einarmigen Hebels, nv, selbst. Denn weil vm als parallel mit nc, und der Winkel, vnc, als ein rechter schon bekannt ist; so muß auch mvn ein rechter Winkel (G. §. 375.) und also nv auf vm perpendicular seyn. Nach den Gesetzen des einarmigen Hebels (§. 120.) nun findet zwischen der Last, L, in v und zwischen der Kraft, K, das Gleichgewicht Statt, wenn jene zu dieser sich verhält, wie ihre Entfernungen vom Ruhepuncte umgekehrt. Das ist: die Last, L, in v wird von der Kraft, K, an ihrem Ort eauf der schiefen Linie erhalten werden, wenn

$K : L = ns : nv$

Um nun von dieser Proportion auf diejenige zu kommen, welche der zu erweisende Lehrsatz erfordert, thue man von Triangel zu Triangel folgende Schritte. Man vergleiche erst die Triangel, nsv und nvx. Beyde haben den Winkel, nvx, gemein, und in beyden sind auch schon als rechte Winkel bekannt, vsn und vnx. Daher sind die

Trian-

Triangel ähnlich (G. §. 461.); und es muß seyn (G. §. 460.)

$$ns : nv = nx : xv$$

Hierauf vergleiche man die Triangel, vnx und box. In beyden sind die Winkel, vnx und box, als rechte bekannt; die Winkel aber, vxn und bxo, sind als Verticalwinkel gleich. Daher sind die Triangel ähnlich (G. §. 461.); und es muß sich verhalten (G. §. 460.),

$$nx : xv = ox : xb$$

Aus dieser Proportion, im Vergleich mit vorhergehender, ergiebt sich leicht eine dritte:

$$ns : nv = ox : xb$$

Ferner betrachte man den Triangel, abc. In ihm ist die Linie, ox, mit seiner Seite, ac, parallel, weil beyde Linien bereits als Perpendicularen auf ba bekannt sind. (G. §. 365.) Daher verhält sich (G. §. 467. *No.* 3.),

$$ox : xb = ac : bc$$

Aus Vergleichung dieser Proportion mit nächst vorhergehender entspringt die dritte:

$$ns : nv = ac : bc$$

Da nun aber schon oben erwiesen ist, daß

$$K : L = ns : nv$$

so ist auch $K : L = ac : bc$

Lehrsatz.

§. 361. Wenn auf einer mathematischen schiefen Linie, bc, (*Fig.* 76.) ein physischer Körper als Last, L, vom Heruntergleiten nach b hin durch die Gegenwirkung einer Kraft, K, deren Richtung, vm, mit der Grundlinie, ba, parallel ist, abgehalten werden soll; so muß die Kraft zur Last sich verhalten, wie die Höhe, ac, der schiefen Linie zu ihrer Grundlinie, ba.

Beweis.

Der Beweis dieses Satzes wird, nur mit wenigen leichten Abänderungen, wie der Beweis des vorigen geführt. Die Last, L, (*Fig.* 76.) sey auch hier ein physischer Würfel.

fel. Dieser werde, in Rücksicht auf den Mittelpunct seiner Schwere, v, vollkommen wie dort über die schiefe Linie, bc, gelegt; aber die biegsame Linie, vm, vermittelst welcher die Kraft, K, den Körper vom Hinabgleiten nach b zurück halten soll, sey nicht wie dort parallel mit der schiefen Linie, bc, sondern parallel mit ihrer Grundlinie, ba, geführt, und dann über die Rolle bey m geschlagen. Nun erscheint, wie dort, der mathematische einarmige Hebel, vn, perpendicular auf die schiefe Linie gestellt; nur daß hier die Entfernung der Kraft vom Ruhepuncte, n, nicht die Hebellinie, nv, selbst, sondern die aus n auf die Richtungslinie der Kraft, vm, gestellte Perpendiculare, ny, ist. Wie dort, wird nun auch hier, nach dem Gesetz des einarmigen Hebels, die Proportion Statt finden:

$$K : L = ns : ny$$

Der Winkel, yvs, ist ein rechter, indem die Linie, vs, als Richtungslinie der Schwere, auf vy, als einer Parallele mit der Horizontallinie, ba, nothwendig perpendicular steht; ferner ist der Winkel, vsn, schon als rechter bekannt: daher ist, vy, mit sn parallel (S. §. 365.), und folglich sind die Perpendicularlinien, ny und sv, innerhalb der Parallelen einander gleich. (S. §. 367. *b*.) Dem gemäß kann in voriger Proportion anstatt ny die Linit, sv, gesetzt und geschlossen werden:

$$K : L = ns : sv$$

Nun werden, wie im Beweise des vorhergehenden Lehrsatzes, die Triangel, nsv und nvx, als ähnlich erwiesen, und dann als eben dergleichen die Triangel, vnx und box. Zuletzt erkennt man, wie dort, daß im Triangel, abc, die Linie, ox, mit seiner Seite, ac, parallel ist, und gewinnt endlich den Hauptschluß. Befolgt man diesen Weg, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Triangel, nsv und nvx, die Proportion

$$ns : sv = nx : nv$$

und aus der Aehnlichkeit der Triangel, vnx und box, folgt, daß

$$nx : nv$$

$$nx : nv = ox : ob$$

Aus Vergleichung beyder Proportionen mit einander ergiebt sich

$$ns : sv = ox : ob$$

Endlich entspringt im Triangel, abc, aus dem Parallelismus der Linie, ox, mit ac der Schluß, wie dort,

$$ox : ob = ac : ab$$

und aus ihm, verglichen mit der letzten Proportion, folgender,

$$ns : sv = ac : ab$$

Da nun aber oben gefunden ward, es sey

$$K : L = ns : sv$$

so ist auch

$$K : L = ac : ab$$

Zusatz.

§. 362. Will man anstatt der schiefen Linie die schiefe Fläche setzen (§. 357.); so werden die beyden jetzt erwiesenen Lehrsätze auch auf sie anwendbar seyn müssen: weil der Mittelpunct der Schwere eines Körpers doch nur über einer ihrer Linien hinbeweget wird.

Erklärung.

§. 363. Wenn auf einer schiefen Linie oder dergleichen Fläche die Kraft gegen die Last nach einer Richtung wirkt, die mit der schiefen Linie oder Fläche parallel ist, wie in (§. 360.); so nennt man sie die schiefe Linie oder Fläche der ersten Art; der zweyten Art aber, wenn die Wirkung der Kraft, wie in (§. 361.) mit der Grundlinie parallel geschieht.

Zusätze.

§. 364. Eine Kraft kann eine Last auf der schiefen Linie der ersten Art jederzeit vortheilhafter für sich erhalten, als auf einer der zweyten, wenn in beyden Fällen der Winkel, den die schiefe Linie mit der Grundlinie macht, eben derselbe ist. Denn die Höhe des rechtwinkligen

Trian-

er steht, doppelt so groß als er, das ist, 60 Grad seyn (G. §. 385. *a.*), und seine Chorde, *ca*, ist die reguläre Sechsecksseite, das ist, der Radius, *dc*, des Halbzirkels. Demnach verhält sich, wenn der Winkel, *b*, 30 Grad ist, die Höhe, *ac*, der schiefen Linie zur schiefen Linie, *bc*, selbst, wie Eins zur Zwey. Eine Last kann also hier mit halber Kraft erhalten werden.

Zusatz.

§. 367. So lange demnach bey einer schiefen Linie der ersten Art der Winkel, den sie mit der Grundlinie macht, noch nicht 30 Grad beträgt, so lange ist die Kraft für das Gleichgewicht mit der auf der schiefen Linie zu erhaltenden Last geringer, als der letztern Hälfte; größer aber als diese Hälfte, wenn der erwähnte Winkel 30 Grad übertrifft.

Anmerkung.

§. 368. Aus Gründen, die hier nicht erklärt werden können, weiß man, daß auf der schiefen Linie der zweyten Art eine Last von einer halb so großen Kraft erhalten wird, wenn der Winkel der schiefen Linie mit der Grundlinie 26 Grad und etwas Weniges unter 34 Minuten beträgt. Uebrigens sehe man auf (§. 361.) zurück.

Aufgabe.

§. 369. Wie bey der schiefen Linie, sowohl der ersten als zweyten Art, wenn ihre Einrichtung und die auf ihr zu erhaltende Last gegeben ist, die Kraft für das Gleichgewicht gefunden werden soll.

Auflösung mit Beweis.

Es sey, bey einer schiefen Linie der ersten Art, ihre Länge 5 Zoll, und ihre Höhe 3 Zoll, die Last aber 9 Loth gegeben; so schließe man, um die Kraft, *K*, für das Gleichgewicht zu finden: wie sich verhält die gegebene Länge der

schie-

schiefen Linie zu ihrer gegebenen Höhe; so verhält sich die bekannte Last zur unbekannten Kraft, *K*. Das ist im gegenwärtigen Falle:

$$5 : 3 = 9 \quad K \qquad (\S.\ 360.)$$

demnach findet man $K = \frac{3 \times 9}{5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ Loth.

Wär die Länge der schiefen Linie 5 Zoll und ihre Grundlinie 4 Zoll, nebst der Last 9 Loth, gegeben worden; so hätte man erst die Höhe der schiefen Linie gesucht, indem man, dem pythagorischen Lehrsatze gemäß, das Quadrat der Grundlinie, das ist 16, vom Quadrate der schiefen Linie, das ist von 25, subtrahirt und aus dem Reste, das ist aus 9, die Quadratwurzel 3 ausgezogen hätte. Nun wär der Schluß

$$5 : 3 = 9 : K$$

wie vorhin zu machen und aufzulösen gewesen.

Wenn endlich bey der schiefen Linie der ersten Art ihre Höhe 3 Zoll und ihre Grundlinie 4 Zoll, nebst der zu erhaltenden Last 9 Loth gegeben worden wär; so hätte man, um die Kraft für das Gleichgewicht zu finden, erst die Länge der schiefen Linie gesucht, indem man nach dem pythagorischen Satze die Quadrate der Höhe und der Grundlinie, das ist, 9 und 16, addirt und aus der Summe, 25, die Quadratwurzel 5 gezogen hätte. Das weitere Verfahren wär wie vorhin gewesen.

Beträf aber die obige Aufgabe eine schiefe Linie der zweyten Art, und es würde ihre Grundlinie 4 Zoll und ihre Höhe 3 Zoll, nebst der Last 9 Loth gegeben, die Kraft, *K*, aber für das Gleichgewicht sollte gesucht werden; so schlöß man: wie sich verhält die Grundlinie, 4 Zoll, zu der Höhe, 3 Zoll, so verhält sich die bekannte Last, 9 Loth, zu der unbekannten Kraft, *K*, (§. 361.)

$$4 : 3 = 9 : K$$

Nun fänd man $K = \frac{3 \times 9}{4} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ Loth.

Wär aber entweder die Länge der schiefen Linie nebst

der Höhe und der Last, oder die Länge der schiefen Linie nebst der Grundlinie und der Last gegeben; so suchte man erst auf die Weise, wie es vorhin bey der schiefen Linie der ersten Art geschah, durch den pythagorischen Satz, aus den zwey gegebenen Linien, im erstern Falle die Grundlinie, im letztern die Höhenlinie: dann würde man im Stande seyn, durch die jetzt vorgestellte Proportion die unbekannte Kraft ebenfalls zu finden.

Zusatz.

§. 370. Wenn nebst der Einrichtung der schiefen Linie die Kraft gegeben wär, und die von ihr zu erhaltende Last sollte gesucht werden; so dürfte man nur auch die angezeigten Wege befolgen, müßte aber zuletzt in der Proportion die Last in die vierte Stelle bringen.

Aufgabe.

§. 371. Die Einrichtung der mathematischen schiefen Linie, oder auch Fläche, für das Gleichgewicht einer gegebenen Kraft mit einer gegebenen Last, zu finden.

Auflösung mit Beweis,
für die schiefe Linie der ersten Art.

Die gegebene Last sey 13 Loth, die Kraft 3 Loth, und es werde eine schiefe Linie oder Fläche der ersten Art verlangt, vermittelst welcher beyde Kräfte in das Gleichgewicht gebracht werden sollen. Nun ist aus (§. 360.) bekannt, daß sich in diesem Falle die Höhe der schiefen Linie zu ihrer Länge verhalten muß, wie die Kraft zur Last; das ist hier, wie 3 zu 13. Man ziehe also eine gerade Linie, *a c*, (*Fig.* 77), die nach einer beliebig angenommenen Einheit dieselbe dreyzehn Mahl enthält, theile sie halb in *d*, und beschreibe aus *d* mit ihrer Hälfte, *d c*, als Radius, auf ihr einen Halbzirkel, *c b a*. Man trage die nöthige Höhe der schiefen Linie, das ist hier, drey der angenommenen Einheiten, mit dem Zirkel in die Peripherie als

Chorde,

Chorde, cb, von dem einen Grenzpuncte, c, des Diameters an. Das andre Ende, b, dieser Chorde verbinde man durch eine gerade Linie, ba, mit dem andern Ende, a, des Diameters. So hat man einen bey b rechtwinklichten Triangel, abc. Denn der Winkel, b, ist ein Winkel im Halbzirkel. Die Hypotenuse ist die begehrte schiefe Linie, und ihre nöthige Höhe ist bc. Stellt man nun den Triangel so, daß er in die Verticalfläche seiner Grundlinie, ab, über sie kommt; so ist der Aufgabe Gnüge geschehn.

Eine andre Auflösung.

§. 372. Wenn man aus der gegebenen Kraft 3 Loth, und der gegebenen Last 13 Loth auf vorige Weise erkannt hat, daß die Höhe der schiefen Linie zu ihrer Länge sich verhalten muß, wie 3 zu 13; so ziehe man eine gerade Linie nach Belieben lang, ab, (*Fig.* 78.), und, wo man will, etwa in c, stelle man auf sie eine Perpendiculare, cd, als die künftige Höhe der schiefen Linie, also hier 3 beliebige Einheiten lang. Hierauf fasse man, für die Länge der schiefen Linie selbst, 13 dergleichen Einheiten mit dem Zirkel, setze ihn in die obere Grenze, d, der Perpendiculare ein, und beschreibe einen Bogen, e, der die zuerst gezogene Linie schneidet. Aus dem Schneidungspuncte ziehe man in d die Linie, ed; so hat man die gesuchte Länge der schiefen Linie. Die beyden gegebenen Kräfte werden auf ihr einander das Gleichgewicht halten, wenn ec, als Grundlinie in der Verticalfläche des Triangels, ecd, horizontal gestellt wird.

Auflösung mit Beweis,
für die schiefe Linie der zweyten Art.

§. 373. Verlangt man aber für das Gleichgewicht zweyer gegebenen Kräfte, z. E. der Last von 13 Loth, und der Kraft von 3 Loth, eine schiefe Linie oder Fläche der zweyten Art: so weiß man schon (§. 361.), daß in diesem

Falle

Falle die Höhe der schiefen Linie sich zu ihrer Grundlinie verhalten muß, wie die Kraft zur Last; das ist hier, wie 3 zu 13. Man ziehe demnach eine gerade Linie, *a b*, (*Fig.* 79.), gebe ihr 13 gleiche Theile nach einer beliebigen Einheit, richte am Ende des dreyzehnten Theils eine Perpendiculare, *b c*, auf, welche drey solche Einheiten enthält, und schließe nun den rechten Winkel, *b*, mit der geraden Linie, *a c*. Diese letzte ist die gesuchte schiefe Linie der zweyten Art für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte, sobald der Triangel, *a b c*, vertical über *a b*, als eine Horizontallinie, gestellt wird.

Zusätze.

§. 374. Weil auf die Größe der rechtwinkligen Triangel bey den zwey Arten der schiefen Linien nichts in der Hauptsache ankommt; so kann in den Zeichnungen, z. B. in (*Fig.* 78.), die schiefe Linie, *e d*, jenseit der Perpendiculare, *c d*, hinaus nach Belieben verlängert werden, wie es hier bis *v* geschehen ist. Läßt man alsdann aus dem Puncte, *v*, auf die verlängerte Grundlinie, *e b*, einen Perpendikel, *v b*, fallen; so wird im Triangel, *e b v*, für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte noch alles so seyn, wie es im Triangel, *e c d*, war. Denn weil bey *c* und *b* rechte Winkel sind, so ist *c d* mit *b v* parallel; und demnach (S. §. 467.) muß seyn

$$ed : dc = ev : vb.$$

§. 375. Das Gesetz des Gleichgewichts bleibt bey der schiefen Linie oder Fläche der ersten Art, *b c*, (*Fig.* 74.) unverändert; so lange nur die Kraft in der Linie, *v m*, parallel mit *b c* der Last zuwider wirkt. Die Rolle bey *m*, und die um sie geschlagene Linie, welche die Kraft als ein Gewicht, *K*, trägt, ist demnach zufällig. Man kann die Kraft auch in einer Hand denken, welche die Linie, *v m*, etwa bey *m*, so stark anhält, als es das Gewicht, *K*, vermag. Endlich kann man auch anstatt der in *m* anziehenden Hand gleichgeltend eine eben so kräftig druckende Hand

bey

bey *d* setzen, welche sich nach der Richtung von *d* durch *v* nach *m* der Last, *L*, die herab zu gleiten strebt, entgegen stämmt.

§. 376. Sobald die Kraft, welche bisher immer im Gleichgewichte mit der Last betrachtet worden ist, durch den kleinsten Zusatz verstärkt wird; so muß durch sie die Last in Bewegung gesetzt werden. Auf der schiefen Linie der ersten Art, *b c*, (*Fig.* 74.) darf alsdann die Kraft der in *m* ziehenden, oder in *d* druckenden Hand nur immer in der Linie, *d v m*, über *m* hinaus fortrücken; so wird die Last mit dem Mittelpunct ihrer Schwere, *v*, in eben dieser Linie sich fortbewegen. In dieser Linie, *d m*, also befinden sich die natürlichen Wege der Kraft und der Last.

§. 377. Bey der schiefen Linie der zweyten Art, *b c*, (*Fig.* 76.) kann man, nach Wegnahme der Rolle bey *m* und des Gewichtes, *K*, ebenfalls in *m* eine Hand denken, die mit einer Kraft, welche dem Gewichte, *K*, gleicht, die Last, *L*, nach der mit der Grundlinie, *b a*, parallelen Richtung, *v m*, erhält; oder man kann, anstatt der in *m* haltenden Hand, eine Hand in *d* setzen, welche, mit jener Kraft versehn, sich der Last nach der Richtung, *d v m*, entgegen stämmt.

Lehrsatz.

§. 378. Wenn bey der schiefen Linie der zweyten Art das Gleichgewicht zwischen Last und Kraft durch einige Verstärkung der letztern gehoben wird: so bewegen sich beyde in zwey geraden Linien fort, deren jede mit der schiefen Linie selbst parallel ist.

Beweis.

Es sey *m n* (*Fig.* 80.) eine schiefe Linie der zweyten Art, auf welcher die Kraft einer Hand in *h* die Last, *L*, vermittelst der mit der Grundlinie, *m o*, parallelen Linie, *c h*, Anfangs im Gleichgewichte erhält. Sobald die Kraft in *h* einen Zusatz bekommt; so wird Bewegung erfolgen

können. Allein, weder die Hand, *h*, als Kraft, noch der Schwere Mittelpunct, *c*, in der Last, können in der Linie, *ch*, nach ihrer Richtung fortrücken; denn dieses läßt die Lage der schiefen Linie, *mn*, nicht zu, verbunden mit dem Umstande, daß die Wirkungslinie, *ch*, der Kraft in *h* stets parallel mit der Grundlinie, *mo*, bleiben soll. Nicht anders wird sich die Last in Rücksicht des Mittelpuncts ihrer Schwere, *c*, auf der schiefen Linie, *mn*, fortbewegen können, als daß derselbe in der Linie, *cv*, schräg aufwärts rückt, welche Linie mit *mn* selbst parallel liegt, indem die Perpendiculare, *cd*, beyden überall einerley Abstand von einander giebt. Soll dieses nun geschehen, so muß die ziehende Kraft, *h*, sich zugleich mit der Last so allmählig über die Grundlinie, *mo*, erheben, daß mit ihr *ch* parallel bleibt. Gelangt auf diese Weise der Punct, *c*, bis in *v*, so wird die Linie, *ch*, in *vw* gelanget seyn, und die Kraft, *h*, in *w*. Die Linie, *vw*, liegt noch parallel mit *mo*, folglich auch mit *ch*. Hierauf ziehe man die Hülfslinie, *vh*; so sind die Triangel, *cvh* und *vwh*, einander gleich. Denn *ch* ist gleich *vw*, als eine und dieselbe fortbewegte Linie; *vh* gleicht sich selbst, und der Winkel, *chv*, gleicht dem Winkel, *wvh*, weil beydes Wechselswinkel an den Parallelen, *ch* und *vw*, sind. (S. §. 344.) Wegen dieser erwiesenen Gleichheit der Triangel sind die Winkel, *cvh* und *vhw*, einander gleich (S. §. 348.); und demnach ist die Linie, *hw*, in welcher die Kraft fortgegangen ist, mit *cv* parallel (S. §. 376.), und eben so mit *mn*, als mit welcher *cv* schon parallel erwiesen ist.

Zusatz.

§. 379. Bey der jetzt betrachteten schiefen Linie der zweyten Art, *mn*, (*Fig.* 80.) erblickt man in der Linie *cv*, den natürlichen Weg (§. 154.) der Last, und in der Linie, *hw*, den natürlichen Weg der Kraft.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 380. Bey der schiefen Linie, sowohl der ersten als zweyten Art, ist der natürliche Weg der Kraft dem natürlichen Wege der Last gleich, und eben so sind es, im Bezug auf diese Wege, beyder Geschwindigkeiten.

Beweis.

Bey der schiefen Linie der ersten Art liegen vermöge (§. 376.) die natürlichen Wege sowohl der Kraft als der Last in der einzigen geraden Linie, *d v m*, (*Fig.* 74.), welche durch der Schwere Mittelpunct, *v*, in der Last, parallel mit der schiefen Linie, *b c*, gezogen wird. Wenn nun im Puncte, *m*, die Kraft als eine fortziehende Hand wirkt, und von ihr die Last, in Rücksicht des Mittelpuncts ihrer Schwere, aufwärts gezogen wird; so bleibt die in der Zeichnung angenommene Entfernung, *v m*, der Last von der Kraft stets unverändert. Sobald demnach der Punct, *v*, im Fortgange dahin gelangt, wo jetzt der Punct, *m*, ist; so muß dieser vorwärts so weit fortgegangen seyn, als die Länge der Linie, *v m*, beträgt; das ist: die natürlichen Wege der Kraft und der Last sind gleich. Da aber diese in einerley Zeit zurückgelegt werden; so bewegen sich auf ihnen Kraft und Last mit gleicher Geschwindigkeit.

Bey der schiefen Linie der zweyten Art, *m n*, (*Fig.* 80.) wird, vermöge (§. 378. 379.), indem die Kraft, *h*, die Linie, *h w*, als ihren natürlichen Weg durchgeht, von der Last, in Rücksicht des Mittelpuncts ihrer Schwere, *c*, die Linie, *c v*, als ihr natürlicher Weg durchlaufen. Die Linien aber, *h w* und *c v*, sind wegen der (§. 378.) gleich erwiesenen Triangel, *h v w* und *h v c*, einander gleich; und hiermit sind es zugleich die natürlichen Wege von Kraft und Last, wie auch die Geschwindigkeiten von beyden auf diesen Wegen, welche in einerley Zeit vollendet werden.

Erklärungen.

§. 381. Es werde auf einer schiefen Linie, *m n*, (*Fig.* 80.)

80.) das Gleichgewicht zwischen der Last, *L*, und der Kraft, die entweder in *v* nach der Richtung, *cv*, parallel mit *mn*, oder in *h* nach der Richtung, *ch*, parallel mit *mo* wirken mag, durch einen kleinen Zuschuß, den die letztre bekommt, gehoben; so wird hiermit sogleich Bewegung erfolgen. Rückt nun die Last, an deren Statt man immer den Mittelpunct ihrer Schwere, *c*, denke, etwa von *c* bis *v* in der Linie, *cv*, fort; so wird ihr mechanischer Weg durch die Größe der Verticallinie, *av*, bestimmt, um welche sie sich allmählig über die Horizontallinie, *ch*, ihres ersten Standes, *c*, erhoben hat. Der mechanische Weg der Last ist demnach bey der schiefen Linie der ersten und zweyten Art auf einerley Weise zu erklären. Anders aber ist es mit dem mechanischen Wege der Kraft; dieser muß, nachdem die schiefe Linie von der ersten oder zweyten Art ist, auf verschiedne Weise bestimmt werden. Ist nehmlich die schiefe Linie, *mn*, (*Fig.* 80.) von der ersten Art, wo die Kraft in der Linie, *cv*, parallel mit *mn* wirkt; so ist ihr mechanischer Weg mit ihrem natürlichen (§. 376.) einerley, und stets perpendicular gegen *cd* gerichtet, welche Linie selbst auf *mn* perpendicular gestellt ist. Da nun der Kraft natürlicher Weg dem natürlichen Wege der Last gleich war (§. 380.), und letzterer hier die Linie, *cv*, ist; so ist im gegenwärtigen Falle eben dieser Linie, *cv*, der mechanische Weg der Kraft gleich.

§. 382. Man betrachte nun, *mn*, (*Fig.* 80.) als eine schiefe Linie der zweyten Art. Dann muß die Kraft, die man als eine an der Linie, *ch*, in *h* ziehende Hand denke, vermittelst dieser Linie auf den Punct, *c*, in der Last, *L*, so wirken, daß *ch* parallel mit *mo*, und also wie diese Horizontal bleibt. In der Linie, *ch*, nun liegt der mechanische Weg der Kraft, welcher demnach auf die Verticallinie des Punctes, *c*, nehmlich auf *cb* perpendicular gestellt zu denken ist. (§. 154.) Wird nun die Last aus *c* bis *v* fortgezogen; so durchgeht die Kraft der Hand, *h*, die Linie, *hw*, als ihren natürlichen Weg (§. 379. 378.),

und gelangt in *w*. Um ihren mechanischen Weg zu erkennen, das ist, um zu bemerken, wie viel weiter sie sich hiermit von der Verticallinie, *c b*, entfernt hat, als da sie noch den ersten Stand in *h* einnahm, darf man nur durch *w* eine Verticallinie, *w e*, ziehn, und bis zu ihr in *e* die Linie, *c h*, verlängern; so wird die Verlängerung, *h e*, der verlangte mechanische Weg der Kraft seyn.

Ferner vergleiche man die Triangel, *c a v* und *h w e*, mit einander. Die Seiten, *v a* und *w e*, in beyden sind gleich, als Perpendicularen zwischen Parallelen. Der Winkel, *v c a*, gleicht dem Winkel, *w h e*, indem die Linie, *h w*, als parallel mit *c v* schon erwiesen ist (§. 378.), und der letztre Winkel, als ein äußerer, dem erstern, als seinem innern, entgegengesetzten gleich seyn muß. Die Winkel, *c a v* und *h e w*, gleichen sich als rechte. Folglich sind auch die Winkel, *c v a* und *h w e*, gleich. (S. §. 379. *c*.) Daher sind die beyden betrachteten Triangel einander gleich und ähnlich (S. §. 345.), und die Linie, *h e*, gleicht also der Linie, *c a*. Nun war *h e* der mechanische Weg der Kraft; die Linie, *c a*, gleicht ihm folglich auch.

Zusatz.

§. 383. In dem rechtwinkligen Triangel, *c a v*, (*Fig.* 80.) übersieht man demnach die mechanischen Wege von Last und Kraft, auf den schiefen Linien beyder Art, zusammen. Wenn nehmlich auf der schiefen Linie der ersten Art, *m n*, die Last, *L*, ihren natürlichen Weg von *c* bis *v* nimmt; so ist ihr mechanischer Weg die Linie, *a v*, und der mechanische Weg der Kraft ist *c v*. Nimmt aber auf der schiefen Linie der zweyten Art, *m n*, die Last, *L*, ihren natürlichen Weg von *c* bis *v*; so ist ihr mechanischer Weg die Linie, *a v*, und der mechanische Weg der Kraft ist *c a*.

Lehrsatz.

§. 384. Auf den schiefen Linien oder auch Flächen, sowohl der ersten als zweyten Art, verhält sich der mechanische

nische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte.

Beweis.

Den eben jetzt betrachteten Triangel, *cav*, (*Fig.* 80.) vergleiche man mit dem Triangel, *mon*. In beyden sind die Winkel, *cav* und *mon*, als rechte Winkel, gleich groß. Der Winkel, *vca*, gleicht dem Winkel *nmo*. Denn *vca* und *cpm* sind gleich als Wechselswinkel an den Parallelen, *cv* und *mp*. Die Winkel, *nmo* und *cpm*, sind gleich als Wechselswinkel an den Parallelen, *ce* und *mo*. Ist aber nun *vca* = *cpm*

und *mno* = *cpm*

so ist auch *vca* = *nmo*

Die Triangel, *cav* und *mon*, sind demnach ähnlich (G. §. 461.); und also verhält sich (G. §. 460.)

cv : *av* = *mn* : *on*

Das heißt, wenn man auf (§. 383.) zurück sieht und zugleich die Figur betrachtet, nehmlich (*Fig.* 80.) bey irgend einer Bewegung der Kräfte auf der schiefen Linie der ersten Art, *mn*, verhält sich der mechanische Weg der Kraft, *cv*, zum mechanischen Wege der Last, *av*. wie die Länge der schiefen Linie, *mn*, zur Höhe derselben, *on*. Nun ist oben (§. 360.) erwiesen, daß sich bey der schiefen Linie der ersten Art ihre Länge zur Höhe, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte verhält: daher verhält sich nun auch der mechanische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, wie die Last zur Kraft. Ferner ist wegen der ähnlichen Triangel, *cav* und *mon*, folgende Proportion richtig (G. §. 460.)

ca : *av* = *mo* : *on*

Das heißt, vermöge (§. 383.) und (*Fig.* 80.): Bey irgend einer Bewegung der Kraft und Last auf einer schiefen Linie der zweyten Art, *mn*, verhält sich der mechanische Weg der Kraft, *ca*, zum mechanischen Wege der Last, *av*, wie die Grundlinie, *mo*, zur Höhe, *on*. Es ist aber vorhin schon (§. 361. 363.) erwiesen, daß bey der

schie-

schiefen Linie der zweyten Art die Grundlinie zur Höhe sich verhält, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte: demnach verhält sich auch der mechanische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, wie die Last zur Kraft.

Zusatz.

§. 385. Wenn man bey den schiefen Linien beyder Arten die Geschwindigkeiten der bewegten Kräfte auf ihre mechanischen Wege beziehen will; so ist offenbar, daß sie auch gegen einander sich wie die mechanischen Wege verhalten, indem diese von ihnen jedes Mahl in einerley Zeit zurück gelegt werden.

Zusätze zu den bisher betrachteten mathematischen schiefen Linien und Flächen überhaupt.

§. 386. Bisher ist nur von der mathematischen schiefen Linie oder auch Fläche gehandelt worden; und da war es am bequemsten, vornehmlich auf die schiefe Linie zu achten, wie dieses auch geschehen ist, die schiefe Fläche aber nur jedes Mahl dabey zu denken. (§. 357.) Denn alle abgehandelten Sätze von der mathematischen, schiefen Linie müssen auch von einer dergleichen Fläche gelten; weil bey einem physischen Körper, der auf einer mathematischen, schiefen Fläche gedacht wird, es doch nur immer auf diejenige Linie in der Fläche ankommt, über welcher sich der Mittelpunct seiner Schwere in Ruhe oder Bewegung befindet. Will man nun aber diese Betrachtungen auf physische Gegenstände anwenden; so betrachtet man die schiefe Fläche als Oberfläche eines physischen Körpers, etwa als die Oberfläche eines Bretes, welches schräg vom horizontalen Boden an einer Wand aufgelehnt ist. Die bekannte Schrotleiter, die oft zum Auf- oder Abladen bey Wagen dient, kann man hier sehr wohl zur Erläuterung gebrauchen. Oder man nehme die Oberfläche eines Weges, der auf einen Berg führt, in die Gedanken. Bey dieser Gattung von schiefen Flächen, die mit physischen Körpern als

ihre Grenzen unmittelbar verbunden sind, werden zwar die Wahrheiten, die bisher von reinmathematischen, schiefen Flächen oder Linien erwiesen wurden, überhaupt auch anwendbar bleiben; allein, weil bey Bewegung physischer Körper auf einander Friction entsteht: so wird dieselbe allerdings auf das Verhältniß der Kraft zur Last, bey dem Gleichgewichte und bey der Bewegung, Einfluß haben müssen. Dieser Einfluß wird oft der Kraft nachtheilig werden; zuweilen aber doch auch, wie sich sogleich zeigen wird, für sie vortheilhaft ausfallen.

§. 387. An der Schrotleiter besonders erläutre man sich überhaupt, worauf etwa bey schiefen Flächen auf physischen Körpern zu achten ist. Die Linie, *a b*, (*Fig.* 81.) stelle eine Horizontalfläche, z. E. die Oberfläche einer Straße vor. Die Perpendicularlinie auf ihr, *b c*, sey die Höhe eines Wagens, in Rücksicht seines Bodens, auf welchen eine Last geladen werden soll. Die Linie, *a c*, sey die Schrotleiter, welche von der Straße an den Wagen hinauf gelehnt ist, und *L* sey die Last, welche man über sie bringen will. Wenn nun die Arbeiter, die damit beschäftigt sind, ihre Kraft gegen den Mittelpunct der Schwere, *v*, in der Last, nach der Richtung von *d* gegen *v*, parallel mit der Länge der Schrotleiter selbst anwenden; so stellt dieselbe eine schiefe Fläche der ersten Art dar. (§. 375) Die druckende Kraft in *d* wird sich zur Last, *L*, bey dem Gleichgewichte, so lange man die Friction noch nicht in Betrachtung zieht, verhalten, wie die Höhe, *b c*, zur Länge der Leiter, *a c*. (§. 360.) Soll Bewegung erfolgen, so muß die Kraft etwas Zuschuß bekommen. Allein da die Friction der Last auf den Balken der Leiter nicht geringe ist; so wird beträchtlich mehr Kraft erfordert werden, als das angeführte Gesetz mit sich bringt. Hier ist also ein Fall, wo die Friction der Wirkung der Kraft nachtheilig wird. Im Gegentheil wird sie ihr vortheilhaft seyn, wenn eben jene Last von dem Wagen aus *c* über die Schrotleiter, *c a*, abgeladen werden sollte. Denn wenn man sie bey *c* an einem

Seile

Seile, *fo*, parallel mit *ca* hielt und dann allmählig durch Nachlassung des Seils hinabgleiten ließ: so würde die Kraft, weil es auch hier die schiefe Fläche der ersten Art blieb, sich eigentlich zur Last verhalten müssen, wie *bc* zu *ac*; da aber ein ansehnlicher Theil der herabstrebenden Last durch ihre Friction, in Rücksicht der Kraft, aufgehoben würde, so dürfte die letztre in geringerm Maße angewendet werden, als das angeführte Verhältniß erfordert.

§. 388. Sobald bey dem Aufladen mit der Schrotleiter die druckende Kraft nicht nach der Richtung, *dv*, (*Fig.* 81.), sondern nach *ev*, das ist, nicht parallel mit der Länge der Leiter, *ac*, sondern parallel mit ihrer Grundlinie, *ab*, angewendet würde: so müßte ein größrer Aufwand von Kraft gemacht werden. Denn nun wär die Leiter eine schiefe Fläche der zweyten Art, bey der sich die Kraft zur Last, wie *bc* zu *ab* verhalten muß. Demnach ist es für die Kraft, bey Anwendung der Schrotleiter, am vortheilhaftesten, wenn der Druck oder Zug der Last mit der Länge der Leiter parallel genommen wird. (§. 364.) Daß dann auch, bey bleibender Wagenhöhe, in Rücksicht der Kraft eine längere Schrotleiter nützlicher ist, als eine kürzere, erhellet leicht daher, weil in der Länge der erstern ihre Höhe mehrere Mahl enthalten seyn wird, als in der Länge der letztern.

§. 389. Die Oberfläche eines Weges, der einen Berg hinauf führt, ist auch eine schiefe Fläche; mit ihr also muß ein Schubkarren, der hinauf gefahren wird, so viel als möglich parallel geschoben werden, nicht parallel mit einer Horizontalfläche. Eben so ist der Zug der Pferde vor einem Wagen, der einen solchen Weg aufwärts fährt, am vortheilhaftesten, wenn er mit dem Wege parallel geschieht. Erreichen dann die Pferde die obere Grenze des Weges, und betreten die Horizontalfläche; so wird sich freylich die Richtung ihres Zuges der Horizontallinie nähern, und sie werden gegen die Last des Wagens, so lange derselbe noch auf dem schiefen Wege hangt, mehr Kraft anzuwenden nöthig haben als vorher: sie müssen aber eben

deswegen in diesem Falle auch vorzüglich stark angestrengt werden, bis der Wagen die Horizontalebene gleichfalls eingenommen hat.

Erklärungen.

§. 390. Alle Sätze vom (§. 360.) bis zum (§. 385), welche von dem mathematischen, schiefen Linien, sowohl der ersten als zweyten Art, vorgetragen worden sind, betrafen die mathematische, schiefe Linie im engen Verstande (§. 357.), bey welcher nehmlich die Grundlinie jedes Mahl horizontal, die Höhenlinie aber auf jener vertical seyn mußte. Diese schiefe Linie ward dann immer die schiefe Linie genannt, ohne die Bestimmung beyzufügen, daß sie dieses im engen Verstande sey; ganz der Erinnerung gemäß, welche im (§. 359.) gegeben ward. Nun aber ist noch einige Erklärung über die mathematische, schiefe Linie, sowohl der ersten als zweyten Art, im weiten Verstande (§. 358), zu geben nöthig; bey welcher nehmlich nicht darauf gesehen wird, ob ihre Grundlinie horizontal und ihre Höhenlinie vertical liegt, sondern bey der es schon genug ist, wenn nur die beyden letztern Linien einen rechten Winkel mit einander machen. Man denke, zum Beyspiel, die Linie, *ab*, (*Fig.* 82.) als eine horizontale, und etwa in ihrer Verticalfläche, welche die Fläche des Kupferstichs seyn mag, liege der bey *d* rechtwinklige Triangel, *cde*. Die übrigen Bestimmungen seiner Lage sollen ganz willkührlich seyn. Hier sind sie so, daß die Linien, *ce* und *cd*, spitzige Winkel mit der Horizontallinie, *cb*, machen. Die Hypotenuse, *ce*, nun ist eine mathematische, schiefe Linie, im weiten Verstande. Eine von den beyden Linien am rechten Winkel, *d*, nehmlich entweder *dc* oder *de*, kann ihre Grundlinie seyn, und nachdem man eine dafür annimmt, so wird die andre die Höhenlinie genennt. Man pflegt aber diejenige von beyden als Grundlinie zu denken, gegen welche die Last, im engen Verstande, ihre Richtung perpendicular nimmt. Diese Last kann gleichwohl

im

§. 392. Die Betrachtungen, die eben jetzt, den (§. 391.) hindurch über die schiefe Linie in (*Fig.* 74.) und den dahin gehörigen (§. 360.), angestellet wurden, stelle man nun in gleicher Ordnung auch über die schiefe Linie der zweyten Art, im engen Verstande, in der Zeichnung (*Fig.* 76.) an, welche im (§. 361.) erklärt ist: so wird man endlich finden, daß auf dieser zwischen dem Drucke einer Hand in *x* nach der Richtung, *xo*, und dem Drucke einer andern gegen sie, von der Seite, *b*, her, in einer mit der Grundlinie, *ba*, parallelen Richtung, das Gleichgewicht Statt findet, wenn der Druck der letztern, als Kraft, sich zum Drucke der erstern, als Last, verhält, wie die Höhe, *ac*, der schiefen Linie zu ihrer Grundlinie, *ba*.

§. 393. Durch die Betrachtung der gegen einander wirkenden Druckkräfte zweyer Hände auf der mathematischen, schiefen Linie der ersten und zweyten Art, im engen Verstande, hat man deutlich erkannt, daß bey diesen Kräften, weil sie keine Schwerkräfte waren, in Absicht ihres Gleichgewichts, durchaus nichts darauf ankommt, ob die Grundlinie eine horizontale Lage habe, oder jede andre, ob die Höhenlinie einen verticalen Stand habe, oder jeden andern, wenn nur die letztre mit der erstern den rechten Winkel beybehält. Hiermit ist nun der Uebergang zur deutlichern Kenntniß der mathematischen, schiefen Linie, im weiten Verstande, *ce*, (*Fig.* 82.) eröffnet; von welcher schon zum Theil die Erklärung im (§. 390.) gegeben ward.

An eine solche Linie, *ce*, (*Fig.* 82.) habe sich nun, als Last, eine druckende Hand, *h*, angelegt; die Richtung ihres Drucks sey von *n* nach *m* perpendicular gegen die Linie, *cd*, gerichtet: daß also hier *cd* als Grundlinie der schiefen Linie, *ce*, anzusehen ist (§. 390.), und *de* als Höhenlinie derselben. Wenn man nun gegen die Hand, *h*, eine andre Hand, als Kraft, in der Richtung von *v* nach *o*, parallel mit der schiefen Linie, *ce*, drucken läßt; so ist die Linie, *ce*, eine schiefe Linie der ersten Art im

weiten

weiten Verstande. Läßt man aber gegen die Hand, *h*, als Last, eine andre Hand, als Kraft, in der Richtung von *x* nach *y*, parallel mit der Grundlinie, *cd*, drucken; so ist *ce* eine schiefe Linie der zweyten Art, im weiten Verstande. Alle Gesetze bey dem Gleichgewichte sowohl als bey erfolgender Bewegung werden nun in jedem Falle mit denen einerley seyn, die bey den mathematischen, schiefen Linien der ersten und zweyten Art, im engen Verstande, erwiesen, und bereits in (§. 391. 392.) auf die einander zuwider druckenden Hände angewendet worden sind. Zum Beyspiel: die nach der Richtung, *vo*, druckende Kraft wird sich, bey dem Gleichgewichte, zu der in *h* nach der Richtung, *nm*, druckenden Last verhalten, wie *de* zu *ce*. Ingleichen wird sich die nach der Richtung, *xy*, druckende Handkraft zu der in *h* in der Richtung, *nm*, aufdruckenden Kraft der andern Hand, in welcher man hier die Last denkt, bey dem Gleichgewichte verhalten, wie *de* zu *cd*.

Zusatz.

§. 394. Wenn man anstatt der schiefen Linie, *ce*, (*Fig.* 82.) eine schiefe Fläche, nach (§. 357.), und zwar die Grenzfläche eines physischen Körpers, als etwa die obere Fläche eines gegen die Horizontalfläche, *ab*, unter dem Winkel, *ecb*, aufgelehnten Balkens annimmt, übrigens aber die druckenden Kräfte unter vorigen Bedingungen wirken läßt: so bleiben die erwiesenen Sätze überhaupt noch richtig, inwiefern nicht die hinzukommende Friction ihrer Genauigkeit mehr oder weniger Eintrag thut.

Man bemerke über dieses, daß, wenn nach der Richtung, *ce*, der angenommene Balken über der Horizontalfläche, *ab*, aufgelehnt wär, die Linien, *cd* und *de*, eigentlich sich zwar nicht sichtbar gegenwärtig fänden, aber sich doch leicht denken ließen. Wenn nehmlich die vorhin gesetzten Richtungen der druckenden Kräfte auf *ce* blieben; so dürfte man nur von *c* aus durch die Richtung, *nm*,

der Last, *h*, eine Perpendicularlinie sich vorstellen, bis dahin, wo auf ihr eine aus *e* gefällte Perpendiculare eintrifft.

Erklärungen.

§. 395. Für die folgenden Sätze ist es vortheilhaft, die mathematische, schiefe Linie, oder auch Fläche der zweyten Art entweder als unbeweglich oder als beweglich zu betrachten. Bisher ist sie stets als unbeweglich betrachtet worden, das heißt, Kraft und Last wirkten zwar auf ihr gegen einander, oder wurden sogar durch einander in Bewegung gesetzt, aber die schiefe Linie blieb dabey unverrücklich an ihrer Stelle. Wenn nun hingegen, bey der Wirkung und Bewegung der Kräfte auf ihr, die schiefe Linie selbst zugleich in Bewegung versetzt wird; so nenne man sie die bewegliche schiefe Linie oder Fläche. Daß und wie dieses geschehen könne, ist nun zu zeigen.

§. 396. Es sey eine mathematische, unbeweglich ruhende Horizontallinie, *ab*, (*Fig.* 83.) und in ihrer Verticalfläche stehe der Triangel, *def*, über ihr als mathematischer Linientriangel, in welchem *ef* zu *ed* sich verhalten soll, wie Drey zu Viere. Auf der schiefen Linie, *df*, liege als Last eine physische Kugel, *c*, vier Loth schwer; dieselbe werde nach der Richtung, *hg*, parallel mit der Grundlinie, *ed*, von einer Hand, *h*, als Kraft vermittelst der Linie, *hg*, in Ruhe erhalten. Wenn dieses geschehen soll, so wird die Hand drey Loth stark zu drucken nöthig haben; denn ihr Druck muß sich zum Gewicht der Kugel, *c*, verhalten, wie *ef* zu *ed*. (§. 361.) So lange nun die Grundlinie, *ed*, sammt dem über ihr stehenden Triangel nicht weichen kann, wird alles in Ruhe bleiben. Man bedenke aber dabey, daß die Kugel, welche von der Hand, *h*, mit 3 Loth Kraft, nach der horizontalen Richtung, *hg*, gedruckt wird, mit eben so viel Kraft sammt dem Triangel nach *m* hin sich zu bewegen streben muß. Da gleichwohl keine solche Seitenbewegung erfolgt; so muß auch in der dem Drucke der Hand gerade entgegengesetzten Richtung,

tung, von *m* nehmlich nach *o* her, dem Triangel mit drey Loth Kraft entgegen gewirkt werden. Dieses geschieht auch in der That durch den angenommenen Zusammenhang seiner Grundlinie, *ed*, mit der unverrücklichen Horizontallinie, *ab*. Ist dieser Zusammenhang fester, als daß ihn der Seitendruck mit 3 Loth von *h* her auflösen kann, und dieses soll er seyn: so wird der Triangel mit 3 Loth in der Gegenrichtung von *m* her widerstehen können, daß es nicht anders ist, als ob sich seiner Seite, *ef*, drey Loth Kraft von *m* her gerade entgegen stämmten. (§. 99.)

§. 397. Man setze nun, daß zwar die Horizontallinie, *ab*, (*Fig.* 83.) unverrücklich fest bleibe, die Grundlinie, *ed*, des Triangels, *def*, aber von ihr abgelöset werde, daß sich derselbe auf ihr hin und wieder verschieben lasse: so wird der Seitendruck der Hand in *h* von drey Loth die Kugel, sammt dem Triangel, der mathematisch für sich keine Schwere hat, nach der Richtung, *hm*, seitwärts über die Linie, *ab*, fort zu bewegen anfangen. Soll dieses nicht geschehen; so muß der mit drey Loth druckenden Kraft der Hand, *h*, eine andre eben so starke Kraft, dergleichen die aufgehobene war, welche durch den Zusammenhang des Triangels mit der Horizontallinie, *ab*, bewirkt ward, gerade entgegen gesetzt werden. Eine solche Kraft wirke dann in einer Hand bey *o*, welche sich mit drey Loth Druck nach der Richtung, *mo*, dem Triangel entgegen stämmt. Nun ist die Ruhe des Triangels und also auch der schiefen Linie, *df*, von neuem hergestellt, und die Kraft, *h*, bleibt auch noch mit der Last, *c*, im Gleichgewichte.

§. 398. Ehe weiter etwas gethan wird, erwäge man, daß die Hand, *h*, (*Fig.* 83.) nicht nur mit drey Loth Kraft in der Richtung, *hg*, zu drucken hat, sondern daß sie selbst auch von der Kugel her in der entgegen gesetzten Richtung, *ch*, vermittelst der gegen den Triangel in *o* gestämmten andern Hand mit eben so viel Kraft wieder gedruckt wird. Sonst könnte sie sich auch nicht ruhig an ihrem Orte, *h*, erhal-

erhalten, sondern würde mit dreylöthiger Stärke fortrücken.

§. 399. Nun aber lasse man die Hand in *h* (*Fig.* 83.) ganz wegweichen, und stelle sogleich statt ihrer der Kugel, *c*, eine mathematische, unbiegsame Linie, *vn*, entgegen, die irgendwo unwandelbar befestigt ist. Diese wird im Puncte, *g*, von der Kugel, nach der Richtung, *cg*, noch mit drey Loth gedruckt, und sie setzt diesem Drucke nach der Gegenrichtung, *gc*, nicht weniger und nicht mehr als ebenfalls drey Loth Kraft entgegen. (§. 99.) So ist denn die alte Ruhe zwischen den hier wider einander wirkenden Kräften noch ein Mahl hergestellt.

§. 400. Hierauf gehe man weiter, und gebe der in *o* (*Fig.* 83.) auf den Triangel nach der Richtung, *mo*, druckenden Kraft von drey Loth einen kleinen, aber bestimmten Zuschuß, welcher *y* heißen mag. Sogleich wird der Triangel sammt der Kugel gegen die gerade Linie, *vn*, auch mit drey Loth und *y* angedruckt werden. Diese unbewegliche und unbiegsame Linie wird daher mit etwas mehr als drey Loth, nehmlich mit drey Loth und *y*, der Kugel von *g* nach *c* hin gerade entgegen drücken. (§. 99.) Nun weiß man aber schon, daß zwischen der Kugelschwere und der in der Linie, *vn*, der Kugel entgegen drückenden Kraft das Gleichgewicht nur dann erhalten werden kann, wenn die letztre zur erstern sich verhält, wie drey Loth zu vier Loth. Durch den Ueberschuß, *y*, der druckenden Kraft ist also das Gleichgewicht gehoben, und die Kugel steht nun vollkommen bereit, sich über die schiefe Linie, *df*, nach *f* zu hinauf heben zu lassen, sobald es ihr nur möglich gemacht wird, höhere Puncte derselben zu erreichen. Den bisherigen Betrachtungen gemäß könnte ihr allerdings diese Möglichkeit dadurch gewähret werden, daß die druckende Kraft der Kugel nachgieng; es könnte aber auch auf jede andere Weise geschehn, bey welcher nach und nach höhere Puncte der schiefen Linie, *df*, unter die Kugel sich bringen lassen. In dem Falle, den wir gegenwärtig betrachten, kann nun

frey-

freylich die im Puncte, *g*, der unbeweglichen Linie, *vn*, druckende Kraft, durch ein Nachgehen, die Kugel nicht auf höhere Puncte befördern; denn jene Kraft kann aus der Linie, *vn*, sich nicht heraus bewegen. Aber da jetzt die Kugel auf keine Weise mehr die schiefe Linie zu ersteigen sich widersetzt, und der Triangel auf der Horizontallinie, *ab*, beweglich steht; so gewinnt die gegen ihn in *o* andrückende Kraft von drey Loth und *y* freye Wirkung, und bewegt ihn sammt der schiefen Linie, *df*, unter der Kugel allmählig hin, wodurch diese immer höhere Puncte erreichen kann, und hiermit die Linie, *df*, hinauf gebracht wird.

§. 401. Es sey alles wieder in dem Zustande, in welchem es sich nach (§. 399.) befand, da der drückenden Kraft in *o* (*Fig.* 83.) noch kein Zuschuß gegeben war, und überhaupt die Kräfte gegen einander ruhig verblieben. Bey diesem noch währenden Ruhestande gebe man nicht, wie vorhin, der Kraft in *o*, sondern der Kugel, *c*, die bisher als Last betrachtet ward, einen Zusatz an Kraft. Man weiß schon, daß vorhin, da sie nur vier Loth schwer war, den beweglichen Triangel, *def*, an seiner Höhenlinie, *ef*, sich in *o* drey Loth Kraft nach der Richtung, *mo*, entgegen stämmen mußten, wofern die Kugel ihn nicht über die Horizontallinie, *ab*, nach *b* hin fortdrängen sollte. Bekommt sie nun jetzt durch den ihr gegebenen Zusatz über vier Loth Schwere; so werden die drey Loth Widerstand in *o* den Triangel nicht mehr aufhalten können, sondern er wird nach *b* hin weichen, und die Kugel wird zugleich an der festgestellten Linie, *vn*, herab sinken, indem sie immer nach und nach über niedrigere Puncte der schiefen Linie, *df*, zu stehen kommt und auf ihr nach *d* hin herabsteigt.

§. 402. Wär es jetzt bey der aufgelegten Kugel, *c*, (*Fig.* 83.) die Hauptabsicht gewesen, durch sie die schiefe Linie, *df*, nebst der in *o* widerhaltenden Kraft, nach aufgehobenem Gleichgewicht, gegen *m* hin fort zu bewegen: so würde man der Kugel in diesem Falle den Namen der

Kraft,

Kraft, im engen Verstande, beygelegt haben, und der Druck in *o*, welcher durch sie überwältigt werden sollte, würde als Last anzusehn gewesen seyn. Hätte man aber zur Hauptabsicht gehabt, durch den Druck in *o* die Kugel, *c*, nach aufgehobenem Gleichgewicht, an der Linie, *nv*, aufwärts zu bewegen; so hätte *o* die Kraft im engen Verstande, und *c* dagegen die Last genennt werden müssen. Die Benennungen der Kraft und der Last beziehen sich demnach hier stets auf einander, und ihre Anwendung wird jedes Mahl durch die Hauptabsicht bey der zu erregenden Bewegung bestimmt.

§. 403. Was nun von (§. 395.) bis hierher vorgetragen ist, wird zureichen, einen sattsam deutlichen Begriff von der mathematischen, beweglichen, schiefen Linie (§. 395.) und Fläche (§. 357.) zu erlangen. Beyde führen diesen Namen nicht nur, wenn wirklich ihre Bewegung erfolgt (§. 400. 401.), sondern auch schon da, wenn sie, sobald nur das Gleichgewicht der an ihnen gegen einander wirkenden Kräfte gehoben würde, in Bewegung versetzt werden müßten, ob sie wohl bey dem fortwährenden Gleichgewichte noch in Ruhe bleiben. (§. 397—399.)

Zusatz.

§. 404. Demnach verhält sich an der beweglichen, schiefen Linie, *df*, (*Fig.* 83.) bey dem Gleichgewichte die Kraft, *o*, welche parallel mit der Grundlinie, *de*, gegen die Höhenlinie, *ef*, sich stämmt, zur Last, *c*, welche auf der schiefen Linie gegen die Grundlinie, *de*, perpendicular druckt, wie die Höhe der schiefen Linie, *ef*, zu ihrer Grundlinie, *de*. (§. 397.) Man sieht hiermit, daß dieses Gesetz mit dem Gesetze für die unbewegliche, schiefe Linie übereinstimmt (§. 396.), nur daß dort die Kraft, *o*, nicht zunächst auf die Höhenlinie, *ef*, sondern auf die Last, *c*, selbst wirkte. Daher kommt es auch, daß die meisten Sätze, welche von der unbeweglichen, schiefen Linie der zweyten Art erwiesen worden sind, nicht weniger auf die

beweg-

bewegliche anwendbar bleiben. So ist es mit den Sätzen, welche in (§. 368. 369. 370. 373. 374.) vorgetragen wurden. Die Aufgaben, wie aus der gegebenen Einrichtung der schiefen Linie, nebst der gegebenen Last, die Kraft gesucht werden soll; oder wie die Last, wenn die Kraft nebst der Einrichtung der Linie gegeben ist; oder wie die Einrichtung der schiefen Linie selbst bestimmt werden muß, wenn Kraft und Last gegeben sind: diese Aufgaben insgesammt werden hier wie dort aufgelöst. Wenn, zum Beyspiel, gefragt wird, wie bey der beweglichen, schiefen Linie, für das Gleichgewicht, die Kraft, welche sich gegen die Höhenlinie stämmt und indessen K heißen mag, gefunden werden soll, wenn die Last als vierzehn Pfund, und die Einrichtung der schiefen Linie so gegeben ist, daß sich ihre Höhe zur Grundlinie verhält wie 4 zu 9: so wird man, wie bey dieser Frage in Rücksicht der unbeweglichen, schiefen Linie der zweyten Art in (§. 369.) schließen müssen:

$$9 : 4 = 14 \text{ Pf.} : K \text{ Pfund.}$$

und K wird seyn $= \frac{4 \times 14}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ Pfund.

Doch in der Lehre von den Wegen der Kräfte und ihren Geschwindigkeiten, sobald Bewegung erfolgt, ist einiges bey der beweglichen, schiefen Linie anders, als es bey der unbeweglichen gefunden ward. (§. 381 bis 385.) Darum ist diese Lehre hier besonders zu betrachten.

Lehrsatz.

§. 405. Bey der mathematischen, beweglichen schiefen Linie verhält sich der natürliche Weg der Kraft, welche gegen die Höhenlinie wirkt, zum natürlichen Wege der Last, in einerley Zeit, wie die Länge der schiefen Linie zu ihrer Höhe; und so verhalten sich auch die Geschwindigkeiten der Kräfte, im Bezug auf diese Wege, gegen einander.

Beweis.

Es sey eine mathematische, bewegliche, schiefe Linie,

ca, (*Fig.* 84.); ihre Grundlinie sey *cb*, ihre Höhe sey *ba*. Die Grundlinie sey zugleich horizontal und die Höhe auf ihr wird vertical seyn. Der ganze Triangel, *cba*, sey auf der Horizontallinie, *fg*, bewegbar. Eine physische Kugel, *v*, als Last, liege auf der schiefen Linie, *ca*, und werde, vermittelst der unverrücklichen Linie, *ed*, welche gegen die horizontale, *fg*, perpendicular gestellt ist, vom Herabgleiten nach *c* abgehalten. Parallel mit der horizontalen Grundlinie, *cb*, nach der Richtung, *hu*, und folglich (S. §. 375.) perpendicular gegen die Höhenlinie, *ba*, stämme sich in *h* die Kraft einer Hand so stark, daß die Last, *v*, den Triangel, *cba*, nach *h* hin nicht verrücken kann (§. 397—399.), und also zwischen der Kraft, *h*, und der Last, *v*, das Gleichgewicht Statt findet. Vermöge eines zugegebenen Ueberschusses für die Kraft, *h*, werde nun aber der Triangel, *cba*, auf der Horizontallinie, *gf*, nach *f* hin fort bewegt, bis er etwa in die Lage, *mwk*, kommt: so wird die Last aus *v* in *n*, an der festgestellten Linie, *ed*, hinauf, vermittelst der schiefen Linie gehoben worden seyn. Der Mittelpunct der Kugelschwere, *v*, wird sich durch die Linie, *vn*, bewegt haben, welche also der Last natürlicher Weg ist. Die Kraft, *h*, welche anhaltend dem fortrückenden Triangel folgt, zugleich aber auch stets, parallel mit *fg*, gegen den Mittelpunct der Schwere in der immer steigenden Kugel wirken muß, wird aus *h* in *o* durch die Linie, *ho*, sich bewegt haben. Diese Linie, *ho*, ist demnach der natürliche Weg der Kraft. Das Verhältniß dieser beyden natürlichen Wege, welche von den zwey Kräften in einerley Zeit zurückgelegt worden sind, zu erkennen, errichte man auf der mit *fg* parallelen Linie, *uh*, im Schneidungspuncte, *q*, den sie mit der schiefen Linie, *ca*, in der ersten Lage macht, eine Perpendiculare, *qs*, bis zur Linie, *no*, und vergleiche nun die Triangel, *pho* und *uqs*. In ihnen sind die Seiten, *ph* und *uq*, gleich. Denn *hu* ist schon als parallel mit *gf* bekannt, und ein Theil, *hq*, der ersten

stern Parallele ist auf ihr bey Bewegung des Triangels, cba, in pu fortgerückt, daß man eigentlich in hq und pu eine und dieselbe Linie erblickt. Die Linie, qp, ist beyden Linien, hq und pu, gemein; man ziehe sie von beyden ab, so bleiben als Reste ph und uq, welche sich gleich seyn müssen. Ferner sind in den Triangeln, pho und uqs, die Winkel, oph und squ, gleich; denn beyde sind rechte Winkel; der erstere, weil bey p sich eine verticale, op, mit einer horizontalen Linie, ph, schneidet, der letztere, weil qs auf qu in q perpendicular errichtet worden ist. Endlich sind auch in beyden Triangeln die Seiten, po und qs, gleich. Denn beyde sind, wegen der eben jetzt erwiesenen rechten Winkel, oph und squ, Perpendicularen auf der Linie, uh, und stehn zwischen den Parallelen, uh und no. Denn diese beyden Linien sind schon als parallel mit fg bekannt, und müssen daher auch unter sich parallel seyn. (G. §. 368.) Demnach können sich die Triangel, pho und uqs, decken (G. §. 344), und die Seiten, ho und us, sind gleich. Daher ist

$$ho : po = us : qs$$

Hierauf vergleiche man die Triangel, uqs und mwk. In beyden sind die Winkel, squ und kwm, bereits als rechte bekannt und also gleich. Es gleichen sich auch die Winkel, suq und kmw, wegen der schon bekannten Parallelen, uh und fg, welche von der Linie, km, geschnitten werden. (G. §. 375.) Daher sind die Triangel ähnlich (G. §. 461.), und demnach ist

$$us : qs = mk : wk$$

Nun aber war vorhin

$$ho : po = us : qs$$

Daher muß seyn

$$ho : po = mk : wk$$

Die Linie, po, im zweyten Gliede dieser Proportion, ist mit de parallel; denn beyde sind Verticallinien. Mit ed aber, als einer Tangente von zwey gleichen Zirkeln, deren gleiche Radien auf ihr perpendicular stehn (G. §. 361.),

ist

ist *vn* parallel. Daher ist *vn* auch mit *po* parallel. (S. §. 368.) Beyde Linien, *po* und *vn*, stehn auf *uh* perpendicular; denn *po* ist schon als vertical auf der Horizontallinie, *uh*, bekannt, und *vn*, als erwiesene Parallele mit *po*, muß nun auch gegen *uh* vertical seyn. Beyde Perpendicularen stehn zwischen den, nothwendig unter sich parallelen, zwey Horizontallinien, *no* und *vp*, und sind demnach gleich. Man setze nun in der letzten Proportion anstatt *po* die Linie, *vn*; so ist

ho : *vn* = *mk* : *wk*

Das ist: der natürliche Weg der Kraft verhält sich zum natürlichen Wege der Last, in einerley Zeit, wie die Länge der schiefen Linie zu ihrer Höhe.

Daß die Geschwindigkeiten beyder Kräfte sich eben so wie ihre natürlichen Wege verhalten, ist klar, da diese von ihnen in gleicher Zeit zurückgelegt werden.

Erklärung.

§. 406. Bey der mathematischen, beweglichen, schiefen Linie, *ca*, (*Fig.* 84.) ist der mechanische Weg der Last, *v*, die Linie, *vn*; denn diese Linie, *vn*, ist im vorigen Beweise als perpendicular auf *uh* erwiesen, und durch diese Perpendiculare soll eben die Last über *uh* hinaufgehoben werden. Der mechanische Weg der Last ist also mit ihrem natürlichen einerley. (§. 405.) Der mechanische Weg der Kraft in *h* ist die Linie, *hp*. Indem nehmlich die Last durch *vn* gehoben ward, gieng die Kraft, *h*, zwar in Rücksicht ihres natürlichen Weges aus dem Puncte, *h*, in den Punct, *o*, durch die Linie, *ho*; die Kraft hatte aber zur Hauptabsicht, die bewegliche, schiefe Linie, *ca*, vermittelst ihres Triangels, *abc*, nach der Richtung, *hp*, welche parallel mit *gf* und perpendicular gegen *ab* liegt, fortzudrängen und also die Linie, *hp*, zu durchlaufen. Daß sie gleichwohl dabey allmählig über die Linie, *hu*, sich erhob, war ein Nebenumstand, den die nothwendig stets steigende Last herbeyführte, auf welche

che sie immer, parallel mit der Grundlinie, bc, fortwirken mußte. Der absichtliche Weg der Kraft blieb unablässig die Linie, hp. Diese also ist ihr mechanischer Weg, welcher sich als perpendicular auf ab bezieht. (§. 154.)

Lehrsatz.

§. 407. Bey der mathematischen, beweglichen, schiefen Linie verhält sich der mechanische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, in einerley Zeit, wie die Last zur Kraft beym Gleichgewicht; und so verhalten sich auch die Geschwindigkeiten der Kräfte, im Bezug auf diese Wege.

Beweis.

Vermöge der Triangel, pho und uqs, (*Fig.* 84.) deren Gleichheit und Aehnlichkeit schon in (§. 405.) erwiesen ward, ist

$$hp : po = uq : qs$$

Ferner ist vermöge der Triangel, uqs und mwk, deren Aehnlichkeit in (§. 405.) erwiesen ward,

$$uq : qs = wm : wk$$

und daher $hp : po = wm : wk$

Die Linie, po, aber ist im (§. 405.) der Linie, vn, gleich erwiesen, daher ist

$$hp : vn = wm : wk$$

Das heißt: der mechanische Weg der Kraft verhält sich zum mechanischen Wege der Last, wie die Grundlinie zur Höhe der schiefen Linie. Nun verhält sich die Grundlinie zur Höhe der schiefen Linie, wie die Last zur Kraft (§. 404.); demnach verhält sich auch der mechanische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, wie die Last zur Kraft. Die Geschwindigkeiten beyder Kräfte, im Bezug auf diese ihre mechanischen Wege, müssen sich nun auch wie dieselben gegen einander verhalten, weil beyde Wege von ihnen in einerley Zeit vollendet werden.

Erklä-

Erklärungen.

§. 408. Wie im (§. 393.) gezeiget worden ist, daß man die mathematische, unbewegliche, schiefe Linie bald im engen, bald im weiten Verstande zu nehmen habe, und daß sie im letztern ihre Grundlinie in jeder beliebigen Lage, auch außer der horizontalen, haben dürfe, wozu in (*Fig.* 82.) die Erläuterung gegeben ward: so kann nun auch die mathematische, bewegliche, schiefe Linie bald im engen, bald im weiten Verstande genommen werden; und im letztern Falle wird ebenfalls ihre Grundlinie jede beliebige Lage, auch außer der horizontalen, haben können. Bisher ist die bewegliche, schiefe Linie nur im engen Verstande betrachtet worden; nun soll sie auch im weiten Verstande durch die Vorstellung in (*Fig.* 85.) erläutert werden. Es sey demnach in dieser Figur die Linie, *op*, horizontal. In irgend einer beliebigen Lage gegen sie, etwa unter dem Winkel, *pkg*, befinde sich die undurchdringliche und unverrückliche Linie, *gk*. An ihr liege der Triangel *abc*, mit der Seite, *bc*, so an, daß er sich an ihr verschieben läßt: so ist *ac* die bewegliche, schiefe Linie im weiten Verstande; *bc* ist ihre Grundlinie, *ab* ihre Höhe. Nun drücke auf diese schiefe Linie, *ac*, nach der gegen die Grundlinie, *bc*, perpendicular zielenden Richtung, *fh*, die Kraft einer Hand, *h*, als Last. Eine andre Hand in *m* stämme sich, als Kraft, perpendicular gegen die Höhenlinie, *ab*, und also in paralleler Richtung mit der Grundlinie, *bc*, so stark, daß zwischen ihr und *h* das Gleichgewicht Statt findet, und die schiefe Linie, *ac*, unbeweglich bleibt. Dieses wird, den vorigen Betrachtungen gemäß, immer noch geschehen müssen; wenn die Kraft, *m*, zur Last, *h*, sich verhält, wie die Höhe, *ab*, zur Grundlinie, *bc*. (§. 404.) Denn alles ist noch eingerichtet, wie bey der beweglichen, schiefen Linie im engen Verstande; nur daß die Last hier keine Schwerkraft, und die Lage der Grundlinie, nicht horizontal ist; auf welche zwey letzten

Um-

Umstände aber, bey dem Gesetz für das Gleichgewicht, nichts ankommen kann. Wie nun dort bey der beweglichen, schiefen Linie im engen Verstande (*Fig.* 84.) eine unbiegsame Linie, *de*, perpendicular gegen die Grundlinie, *cb*, fest gestellt werden mußte, um an derselben, so bald die schiefe Linie in Bewegung käm, die Last hinauf heben, und dieselbe hiermit sich von der Grundlinie mehr und mehr entfernen zu lassen: so setze man auch hier, bey der beweglichen, schiefen Linie, im weiten Verstande, (*Fig.* 85.) auf dieselbe eine gegen die Grundlinie, *bc*, perpendicular gestellte, unverrückliche Linie, *de*, auf welcher der mit der Hand, *h*, verbundne Arm, *fh*, mehr und mehr von der Grundlinie, *bc*, perpendicular entfernt wird, sobald die Kraft, *m*, einen Zuschuß bekommt, und von ihr die bewegliche, schiefe Linie, *ac*, sammt der Höhe, *ab*, und der Grundlinie, *bc*, an *gk* herab fort beweget wird.

So erscheint denn hier die mathematische, schiefe Linie im weiten Verstande erst in Ruhe, bey dem Gleichgewicht der sowohl auf sie als auch wider einander wirkenden Kräfte, und dann auch in Bewegung, nachdem das Gleichgewicht jener Kräfte aufgehoben ward. Den Aufgaben, welche bey der beweglichen, schiefen Linie im engen Verstande aufgelöst worden sind, geschieht hier bey der Linie eben dieser Art im weiten Verstande wie dort Genüge; und was bey jener von den natürlichen und mechanischen Wegen, wie auch von den Geschwindigkeiten der Kräfte beygebracht worden ist, bleibt alles vollkommen auch hier anwendbar.

§. 409. Wenn man die jetzt erklärte bewegliche, schiefe Linie, im weiten Verstande, im Zusammenhange mit ihrer Grund- und Höhenlinie betrachtet; so wird sie auch der mathematische Linienkeil genennt. Geschieht dieses, so heißt nun die Grundlinie, *bc* (*Fig.* 85.) die Länge desselben Keils, die Höhenlinie, *ab*, heißt seine Dicke oder sein Rücken, und die schiefe Linie, *ac*, selbst, seine Seite.

§. 410. Stellt man auf die Fläche des Triangels, *abc*, (*Fig.* 85.) perpendicular über seine Seiten drey gleich hohe

mathematische Flächen, und sieht dieselben als Seiten eines dreyeckigen Prisma an, das zu seinen Grundflächen die Triangelfläche, *a b c*, hat; so heißt dieser prismatische Körper ein mathematischer, körperlicher Keil, oder ein mathematischer Keil, ohne weiterm Beysatz. Die Benennungen seiner Länge, Dicke und Seite werden so geordnet, wie sie bey dem Linienkeil angegeben sind. (§. 409.)

Zusatz.

§. 411. Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung bleiben demnach bey dem mathematischen Linienkeile sowohl, als bey dem körperlichen, eben die, welche bey der beweglichen, schiefen Linie im weiten Verstande Statt gefunden haben. Nur die Aussprüche der Sätze werden hier, wegen der abgeänderten Benennungen (§. 409.), etwas anders als dort klingen. Dort sagte man zum Beyspiel: Kraft und Last verhalten sich bey dem Gleichgewichte zwischen ihnen, wie die Höhe der schiefen Linie zu ihrer Grundlinie; hier aber bey dem Keile wird man sagen: Kraft zur Last an ihm verhält sich bey dem Gleichgewichte zwischen beyden, wie die Dicke des Keils zu seiner Länge, u. s. w.

Erklärungen.

§. 412. Besteht der mathematische Linienkeil aus einem einzigen rechtwinkligen Triangel, *a b c*, (*Fig* 85.); so nenne man ihn den einfachen: besteht er aus zweyen derselben Gattung, *a d c* und *b d c* (*Fig.* 86.), die in einer fortgehenden, ebenen Fläche liegen, sich einander nicht nur gleich, sondern auch ähnlich sind, und mit der Längenlinie, *c d*, in eine und dieselbe Linie fallen; so nenne man ihn den doppelten oder zweyfachen Linienkeil. Seine Länge wird seyn die Linie, *c d*; seine Dicke oder sein Rücken, *a b*; und seine beyden Seiten, die Linien, *a d* und *b d*.

§. 413.

§. 413. Man lasse bey dem zweyfachen Linienkeile das übrige alles wie vorhin; aber die beyden zusammengesetzten Triangel sollen nicht gleich und nicht ähnlich seyn; wie dieses der Fall bey den Triangeln, *a c b* und *b c d*, (*Fig.* 87.) ist: so heißt, *a d c*, ein irregulärer, zweyfacher Linienkeil; und im Gegensatze von ihm wird nun der in (*Fig.* 86.) dargestellte und in (§. 412.) beschriebene, ein regulärer, zweyfacher Linienkeil genennt.

§. 414. Was in den zwey vorigen Paragraphen gesagt worden ist, wende man nun auch auf den mathematischen, körperlichen Keil an. Man nenne das in (§. 410.) angegebene Prisma den einfachen, körperlichen Keil; und wird noch ein gleichgroßes und ähnliches so mit ihm zusammen gesetzt, daß sich von beyden die Längenflächen decken, so werde es der zweyfache, körperliche Keil genennt.

§. 415. Wenn die beyden zusammengesetzten Prismen zwar den Flächen nach, die zusammen vereinigt werden, gleich, aber übrigens, als Körper betrachtet, nicht gleich und ähnlich sind: so erhält ein solcher zweyfacher, körperlicher Keil den Beynamen eines irregulären. Im Gegensatz seiner wird derjenige zweyfache, der in (§. 414.) angegeben ist, nun der reguläre, zweyfache körperliche Keil zu nennen seyn.

§. 416. Es lassen sich die mathematischen, körperlichen Keile auch dreyfach, vierfach, fünffach, u. s. w. denken, ja endlich auch rund. In allen diesen Fällen können sie entweder regulär oder irregulär seyn. Man setze, z. B., eine Quadratfläche, und errichte aus ihrem Mittelpuncte, das ist, aus dem Durchschnittspuncte ihrer zwey Diagonallinien, eine Perpendiculare von beliebiger Länge. Auf die vier Quadratseiten stelle man vier Triangelflächen, deren Spitzen sich im freyen Grenzpuncte der Perpendiculare vereinigen; so hat man einen regulären, vierfachen, körperlichen Keil. Die Quadratfläche ist sein Rücken; eine Parallellinie mit einer ihrer Seiten, durch ihren Mittelpunct, ist seine Dicke; die auf das Quadrat gestellte Per-

pendicularlinie ist seine Länge; die vier Triangel sind seine vier Seiten; und das Ganze ist eine reguläre, viereckige Pyramide. Will man sich einen irregulären, viereckigen Keil vorstellen; so kann man es auf mehr als eine Art, etwa so. Man behalte die Quadratfläche als Rücken bey, stelle aber auf sie die Perpendicularlinie, welche des Keils Länge angiebt, nicht, wie vorhin, in den Mittelpunct, sondern irgendwo neben denselben, und verbinde dann wieder mit seinem Grenzpuncte die Spitzen der vier Triangel über den Quadratseiten. Ein mathematischer, regulärer, runder Keil wird ein gerader Conus seyn. Die Grundfläche desselben ist sein Rücken; der Diameter von ihr seine Dicke; die Achse seine Länge, und die gebogne Seitenfläche seine Seite. Soll dieser runde Keil irregulär seyn; so setze man etwa seine Höhenlinie über einen Punct der Grundfläche, welcher nicht ihr Mittelpunct ist.

Lehrsatz.

§. 417. Wenn bey dem mathematischen, regulären, zweyfachen Linienkeile die Last, auf seine beyden Seiten zu gleichen Theilen vertheilt, perpendicular gegen seine Längenlinie in einem und demselben Puncte wirkt; die Kraft aber gegen den Rücken in der Richtung seiner Längenlinie, und also perpendicular, angewendet wird: so verhält sich, bey dem Gleichgewichte, die Kraft zur Last, wie die halbe Dicke des Keils zu seiner ganzen Länge.

Beweis.

Den Bestimmungen des Lehrsatzes gemäß, sey der mathematische, reguläre, zweyfache Linienkeil, *a b d*, (*Fig.* 86.). Die Linie, *a b*, ist seine Dicke und hier zugleich sein Rücken; *a c* ist davon die Hälfte; *c d* ist des Keiles Länge; *a d* und *b d* sind seine beyden Seiten. Die auf diese zwey Seiten gleichvertheilte Last denke man sich in den zwey auf dieselben perpendicular gegen die Längenlinie, *c d*, in einem und demselben Puncte, *v*, gleich stark drückenden

ckenden Händen, m und n. Die zu ihnen gehörigen Arme, om und pn, liegen in sicher bleibender Richtung auf den fest gestellten Linien, qs und wu. Die Kraft wirke in der Hand, c, welche nach der Richtung der Länge, cd, des Keils drückt. Dieser Keil selbst bedarf für sich keiner fest gestellten Leitungslinie, dergleichen der einfache (*Fig.* 85.) in der dort angegebenen Linie, gk, wohl nöthig hatte. Denn der gegenwärtige (*Fig.* 86.) kann vermöge der Umstände, die auf beyden Seiten der in c druckenden Kraft gleich sind, für sich schon, wenn er auch in Bewegung gebracht wird, nicht seitwärts ausweichen; sondern seine Längenlinie wird gewiß in ihrer Verlängerung herab fortrücken. Eben diese Gleichheit auf beyden Seiten ist auch die Ursache, warum man die druckende Kraft, c, bey dem Gleichgewicht und bey der folgenden Bewegung, über dem Mittelpuncte, c, der Keildicke, ab, wirken lassen kann, ohne zu besorgen, daß der Keil bey dem Fortrücken aus seiner Richtung kommen werde.

Nun sondre man in Gedanken den zweyfachen Linienkeil, abd, in die beyden gleichgroßen und ähnlichen einfachen, acd und bcd, aus welchen er zusammengesetzt ist. Jeden derselben beschwert eine gleich große Last, weil der Druck in m und n gleich stark angenommen ward; daher wird auch jeder derselben für das Gleichgewicht eine gleich starke Kraft nöthig haben. Diese sey $\frac{c}{2}$. In jedem einzelnen wird nun bey dem Gleichgewichte sich verhalten die Kraft zur Last, wie die Dicke zur Länge des einfachen Keils (§. 411.), das ist, für den Keil, acd, wird dann seyn

$$\tfrac{c}{2} : m = ac : cd$$

und für den Keil, bcd, wird seyn

$$\tfrac{c}{2} : n = bc : cd$$

Die letztre Proportion bleibt richtig, wenn beyde Glieder des ersten Verhältnisses mit Zwey multiplicirt werden (S. §. 260.), nehmlich

$$2 \times \tfrac{c}{2} : 2 \times n = bc : cd,$$

(*Fig.* 86.) an, deren Druck auch nur als eine einzige Last für den mathematischen, zweyfachen Linienkeil, *a b d*, zu achten ist: so wird man bald einsehen, daß, wenn er bis zu seiner Grundlinie, oder Dicke, *a b*, zwischen beyde Hände eingedrungen ist, die Hälfte, *a c*, dieser Dicke als der vollbrachte natürliche und mechanische Weg der Last gedacht werden muß, nicht aber die ganze Dicke, so wenig als im gegebenen Beyspiele der ganze Diameter des runden, eisernen Keils.

Lehrsatz.

§. 420. An dem mathematischen, regulären, zweyfachen Linienkeile, wenn er unter den Bestimmungen des (§. 417.) wirkt, verhält sich, sobald er in Bewegung gesetzt wird, der natürliche sowohl als der mechanische Weg der Kraft zu beyden Arten des Weges der Last, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte.

Beweis.

Bey dem so bestimmten Keile (*Fig.* 86.) *a b d*, wenn er von der Spitze an in *d* bis zur Linie seiner Dicke, *a b*, zwischen der Last, die in beyden Händen, *m* und *n*, liegt, vermittelst der Kraft in *c* hindurch getrieben wird, ist, wie im (§. 419.) gezeigt ward, die halbe Dicke, *a c*, des Keils der natürliche sowohl als der mechanische Weg der Last. Beyderley Weg der Kraft, *c*, ist in gleicher Zeit offenbar eine Linie, die der Länge, *c d*, des Keils gleich ist; denn die Kraft folgt dieser Längenlinie in gleicher Richtung mit ihr unmittelbar nach. Demnach verhält sich der natürliche und mechanische Weg der Kraft zum natürlichen und mechanischen Wege der Last, in einerley Zeit, wie die Länge, *c d*, des Keils zu seiner halben Dicke, *a c*; das ist vermöge (§. 417.), wie die Last, *m* und *n*, zur Kraft, *c*, bey dem Gleichgewichte. Die Geschwindigkeiten von Kraft und Last, in Rücksicht ihrer natürlichen und mechanischen Wege, müssen nun eben dieses Verhält-

niß

niß gegen einander haben, weil beyder Wege in gleicher Zeit zurückgelegt werden.

Zusätze.

§. 421. Wenn man auf den einfachen und zweyfachen Linienkeil zurück sieht, wird leicht zu bemerken seyn, daß es der Kraft, wenn sie auf den Rücken wirkt, um so viel vortheilhafter ist, je mehrere Mahl die Dicke des Keils in seiner Länge enthalten ist.

§. 422. Hätte man bey dem ein- und zweyfachen Linienkeile die Absicht, daß die Kraft, die gegen den Rücken wirkt, durch die Last, welche auf die Seiten druckt, in Bewegung gesetzt und zurück getrieben werden sollte: so müßte das Gleichgewicht nicht durch Verstärkung der Kraft, sondern der Last aufgehoben werden. Dann würde der Keil nicht nach seiner Spitze hin, sondern gegen seinen Rücken zu in Bewegung kommen; und was bisher Last genennt worden ist, würde in solchem Falle die Kraft zu nennen seyn, die gemeiniglich sogenannte Kraft aber würde nun die Last heißen. Man erinnere sich hier an dasjenige, was in eben dieser Rücksicht schon bey der beweglichen, schiefen Linie angemerkt ward. (§. 402.)

§. 423. Alles, was von (§. 417.) an bis hierher über den mathematischen, regulären, zweyfachen Linienkeil vorgetragen und erwiesen worden ist, läßt sich auch auf den mathematischen, regulären, körperlichen Keil (§. 415. 416.) anwenden; es sey derselbe zwey- drey- vier- oder mehrfach, oder auch endlich rund. Nur muß man, wenn alles deutlich bleiben soll, auch bey diesen Keilen die Nebenumstände so annehmen, wie sie von dem zweyfachen Linienkeile in (§. 417.) und (*Fig.* 86) gesetzt wurden. Wenn man, z. B., die Anwendung auf den mathematischen, regulären, vierfachen körperlichen Keil machen will; so setze man auch bey diesem, daß die Last auf seine vier Seiten gleich vertheilt ist, und gegen die Längenlinie in einerley Puncte perpendicular wirkt. Bey dem regulären, runden

oder conischen Keile setze man, daß sie gegen seine Längenlinie oder Achse in einerley Puncte ringsum nach allen Richtungen perpendicular und gleichstark drückt, u. s. w. Dann wird sich ergeben, daß auch bey jedem dieser Keile das Gleichgewicht Statt finde, wenn die Kraft zur Last sich verhält, wie die halbe Dicke des Keils zu seiner ganzen Länge.

Anmerkung.

§. 424. Die Untersuchungen, was dann erfolgen würde, wenn bey den mathematischen, regulären Keilen die Last auf allen Seiten nicht gleich vertheilt wär, oder wie es mit den Wirkungen der irregulären Keile (§. 415. 416.) von gar verschiedner Art beschaffen sey, lasse man in diesen Anfangsgründen bey Seite gesetzt bleiben.

Zusätze zu der mathematischen, beweglichen schiefen Linie, oder auch Fläche, ingleichen zu den mathematischen Keilen überhaupt.

§. 425. Die bewegliche, schiefe Fläche, im weiten Verstande, findet sich auch, sehr brauchbar für die Künste und für den Nutzen im gemeinen Leben, an mehrern physischen Körpern; aber mathematisch genaue Berechnungen für die Wirkungen der Kräfte an ihr sind in solchem Falle, wegen alsdann hinzukommender Friction und anderer Nebenumstände, im voraus anzustellen nicht möglich. In wie fern sich auch dabey noch überhaupt Berechnungen führen lassen; so gehören dieselben doch nicht in gegenwärtige Schrift, wo die dazu nöthigen Vorkenntnisse, theils ihrer Schwierigkeit, theils ihrer nothwendigen Umständlichkeit wegen, nicht haben gegeben werden können. Hier ist weiter nichts möglich, als auf solche Gegenstände von fern hinzudeuten.

Bewegliche, schiefe Flächen, im weiten Verstande, an physischen Körpern kommen bey Fähren vor, durch deren Beyhülfe die Ueberfahrt quer durch einen Strom möglich gemacht

gemacht wird. Sie werden auf mehr als eine Art eingerichtet, und sind, wo Brücken fehlen, und doch Straßen von Strömen durchschnitten werden, höchst brauchbar. Die Schifffahrt ist der Wissenschaft und der Anwendung schiefer Flächen an physischen Körpern zu ihrer Vollkommenheit sehr benöthigt. Denn soll, z. E., das Schiff nach einer Gegend laufen, wohin doch jetzt der Wind nicht weht; so wird es gleichwohl dahin auch durch einen Seitenwind gebracht werden können, wenn demselben nur die Flächen der Segel nach bestimmten Regeln schief entgegen gestellt werden. Vier schiefe Flächen erblickt jeder, der eine Windmühle im Gange sieht, an ihren vier Flügeln dem Winde entgegen gestellt; und eben hierdurch wird ihr Umgang, auch schon bey einer nur sehr mäßig bewegten Luft, zum Vortheil der Bewohner nah liegender Orte, die keine Wassermühle haben, möglich gemacht. Wer solche Gegenstände, dergleichen Fähren, Segeltücher und Flügel der Windmühlen sind, nur überhaupt einigermaßen kennt, bemerkt doch bald, daß bey ihrer vortheilhaften Einrichtung und Erklärung sehr viel auf die Kenntniß der beweglichen, schiefen Flächen, im weiten Verstande, ankommen muß, und daß also die vorgetragnen Grundlehren von ihnen sehr nöthig sind. Er wird aber zugleich wahrnehmen, daß bey den angegebenen Exempeln noch gar manche Kenntniß von den Kräften und Richtungen des Wassers sowohl als des Windes hinzukommen muß, wenn etwas von ihnen zureichend erklärt und berechnet werden soll. An den Windmühlen wird er besonders mancherley Frictionen gewahr werden, die gewiß auch die gelehrtesten Berechnungen von ihren Wirkungen nicht mit mathematischer, obwohl für den Gebrauch zureichender Genauigkeit werden ausführen lassen.

§. 426. Der Keil wird auch als physischer Körper unter sehr verschiednen Gestalten nutzbar gebraucht. Man denke nicht allein an die eisernen Keile, mit welchen der Holzarbeiter die Klötze oder andre große Stücke Holz zu

spal-

spalten pflegt; sondern man erwäge auch, daß Aexte, Beile und Messer von mancherley Art, zu welchen auch die nach einem Bogen gearbeiteten Wiegemesser gehören, in Rücksicht ihrer Klingen unter die physischen, zweyfachen Keile zu rechnen sind; ingleichen Degen und Schwerter. Bretnägel sind, wenigstens in dem untern Theile von ihrer Spitze herauf, kleine, physische, vierfache Keile. In den Pfriemen, in den Näh- und Stecknadeln erblickt man, besonders in der Nähe der Spitzen, runde oder conische Keile. Man wird bey Betrachtung dieser nützlichen Kunstwerke gewiß die Grundregeln der bereits erklärten mathematischen Keile anwenden können; aber die starken Frictionen nicht nur, sondern auch die Richtungen des Drucks von der Last, die nur in seltnen Fällen perpendicular gegen die Längenlinie eines physischen Keils sind, wie sie es bey dem mathematischen seyn konnten, machen bey ihm die Berechnungen sehr schwer, und lassen überhaupt keine mathematische Genauigkeit zu.

Bey dem mathematischen Keile ließ man die Kraft auf ihn durch den Druck wirken, welcher genau bestimmt werden konnte; auf den physischen wirkt oft der Schlag des Hammers oder der Axt, wie dieses der Fall bey Nägeln und Holz ist, wenn die erstern durch den Hammer befestigt, das letztre aber durch eingetriebene Keile gespaltet werden soll. Doch die Kraft der Schläge ist schwer zu berechnen, wenn dabey auch nur Annäherung zur Richtigkeit verlangt wird. Zuweilen wird bey physischen Keilen durch ihren eignen Schwung die Kraft der Wirkung verstärkt; so ist es bey Hieben, die mit dem Degen oder dem Schwerte geführt werden. Bey dem Brodmesser, da die druckende Kraft der Hand, nicht eben zu ihrem Vortheil, am Heft angebracht wird, giebt man der Schneide doch dadurch mehr Wirksamkeit, daß man sie, bey dem Eindringen, zugleich wie eine Säge zieht. Denn obwohl an der Schneide einer guten Messerklinge nichts zu sehen seyn darf, das Sägezähnen ähnlich ist; so hat doch die beste Schneide

für

für uns unsichtbare Unebenheiten genug, welche sie etwas rauh und hiermit also gleichsam zu einer höchst feinen Säge machen. Auf die angezeigten und viel mehrere Nebenumstände wird man also, noch außer der Keilform, bey dem physischen Keile zu achten haben, wenn man in Zukunft über ihn Berechnungen anstellen will.

Erklärungen.

§. 427. Bey den mathematischen, schiefen Linien bemerke man, außer den Eintheilungen, die von ihnen schon vorhin erklärt worden sind, noch die eine, daß sie nehmlich auch in gerade und krumme eingetheilt werden. Diejenigen, welche auf einer ebenen Fläche sich befinden, wie dieses bey allen, die bisher betrachtet worden sind, der Fall war, heißen gerade, schiefe Linien; diejenigen aber, welche sich um eine krumme Fläche beugen, heißen krumme, schiefe Linien. Die letztern können wieder von gar verschiedner Art seyn; denn es wird bey ihnen theils darauf ankommen, von welcher Beschaffenheit die krumme Fläche ist, um welche sie gebeugt werden, theils darauf, nach welcher Regel die Beugung selbst geschehen soll. Gegenwärtig sind aber nur, wegen ihrer besondern Nützlichkeit, diejenigen krummen, schiefen Linien zu betrachten, welche sich um die krumme Seitenfläche eines geraden Cylinders beugen, und zwar nach folgender Regel.

§. 428. Es sey eine mathematische, gerade, schiefe Linie, *a c*, (*Fig.* 88.) zu welcher *a b* als Grundlinie und *b c* als Höhenlinie gehört. Die ganze Triangelfläche, deren Grenzen die drey angegebenen Linien sind, denke man auf einer horizontalen Ebene über der Grundlinie, *a b*, vertical stehend, und beuge diese auf jener in eine Zirkellinie, *d e f g*, daß hiermit die Puncte, *a* und *b*, in einen Punct, *d*, zusammen fallen. Die Triangelfläche wird auch dann noch in ihrer gebognen Form, *d e f h*, über der Zirkellinie auf der horizontalen Ebene vertical stehn, und das Ansehn eines Stücks von der Seitenfläche eines geraden

Cylin-

Cylinders gewinnen, der zur Peripherie seiner Grundfläche die gebogne Grundlinie des Triangels, und zur Höhe, dh, die Höhenlinie, bc, desselben Triangels hat. Man denke nun wirklich diesen mathematischen Cylinder, $dfnh$, in die gebogne Triangelfläche hineingesetzt, wie es die Figur vorstellt; so wird diese Triangelfläche ein Theil von seiner Seitenfläche werden, und um diese her wird die vorhin gerade, schiefe Linie, ac, von d nach m hin bis h gebogen erscheinen. Hier sieht man also die krumme, schiefe Linie um die Seitenfläche eines Cylinders her. Eine krumme Linie dieser Art nennt man einen mathematischen Schraubengang; die Höhenlinie, dh, des gebogenen Triangels nennt man des Schraubenganges Weite, den Cylinder, dn, selbst, seine Spindel, und die in einen Zirkel gebogene Grundlinie des Triangels nennt man die Peripherie der Spindel, $defg$.

Zusatz.

§. 429. Die Linie, dh, (*Fig.* 88.) welche die Weite des Schraubenganges angiebt, ist mit der Achse der cylindrischen Spindel parallel. Denn die letztre als Achse eines geraden Cylinders steht auf seiner Grundfläche perpendicular (G. §. 514.), und die erstre gleichfalls, weil sie im Triangel, abc, schon auf der Horizontalebene, in welcher jene Grundfläche liegt, vertical stand. (G. §. 497. *c.*)

Erklärungen.

§. 430. Bey dem jetzt vorgestellten Schraubengange ward die gerade, schiefe Linie im engen Verstande (§. 390.) angewendet, deren Grundlinie nehmlich horizontal liegt und deren Höhenlinie vertical auf jener steht. Der betrachtete gerade Cylinder ward auch auf eine Horizontalfläche gestellt. Alle diese Umstände, insofern sie horizontale und verticale Lagen betreffen, können allerdings zuweilen bey einem Schraubengange sich finden, aber sie gehören doch wesentlich zu demselben nicht; sondern wurden nur,

die

die erste Vorstellung von ihm zu erleichtern, hier angenommen. Man denke nun den Triangel, *a b c*, (*Fig.* 88), in welcher Lage man will, behalte aber seine Seite, *a b*, als Grundlinie bey; man hebe auch nun in Gedanken den Cylinder, *d n*, mit dem Schraubengange von der Horizontalebene auf und halte ihn außer der verticalen Lage in irgend einer andern; so bleibt der Schraubengang dennoch wie vorhin, und es erhellt, daß allgemein gesagt werden kann: ein Schraubengang um einen geraden Cylinder entsteht, wenn eine gerade, schiefe Linie, im engen oder weiten Verstande (§. 390.), um einen geraden Cylinder, dessen Peripherie an der Grundfläche der Grundlinie jener schiefen Linie, und dessen Höhe der Höhenlinie von jener gleicht, so gebogen wird, daß die Grundlinie von jener die Peripherie um die Grundfläche des Cylinders deckt.

§. 431. Ein Schraubengang heißt unbeweglich, wenn er selbst in Ruhe bleibt, indem sich Kraft und Last an ihm in Bewegung setzen; beweglich heißt er, wenn er, sobald Kraft und Last an ihm bewegt werden, zugleich in Bewegung kommt.

§. 432. Wegen der bald folgenden Vorstellungen setze man, daß der mathematische Schraubengang (*Fig.* 88.) eine mathematische, unbiegsame und undurchdringbare Linie sey, und eben so eine die Linie, *d h*, welche seine Weite angiebt. Den Cylinder aber denke man, wie es die mathematischen Körper eigentlich für sich schon sind, auch hier durchdringbar; nur seine beyden Grundflächen nebst der Achse nehme man undurchdringlich an. Durch diese Voraussetzungen wird sich jeder die Einsicht in bald folgende Sätze sehr erleichtern können.

433. Die Linie, *o p*, (*Fig.* 89.) sey horizontal. Ueber einem Theile von ihr, *a b*, stehe in ihrer Verticalfläche der bey *b* rechtwinklige Triangel, *a b c*, unbeweglich. Auf der schiefen Linie, *a c*, liege ein physischer Körper, *d*, als Last, und werde von einer Hand in *f* nach der mit *a b* parallelen Richtung, *e f*, im Gleichgewichte erhalten. Hier

sieht

steht man also die schiefe, gerade, unbewegliche Linie der zweyten Art, im engen Verstande. Der Mittelpunct der Schwere, *e*, in der Last, *d*, strebt nach der verticalen Richtung, *eg*, und also perpendicular gegen die Grundlinie, *ab*, auf den Punct, *v*, in der schiefen Linie, herab. Die Wirkung auf diesen Punct wird noch eben dieselbe bleiben, wenn man den Körper, *d*, nachdem er von der Linie, *ac*, abgenommen worden, in der Linie, *vn*, welches die verlängerte Linie, *vg*, ist, etwa in *n*, anhangt. Denn sein Mittelpunct der Schwere, *n*, wird nun in diese Linie fallen, und den Punct, *v*, jetzt so stark niederziehn, als er vorhin von *e* aus ihn niederdrückte. Man denke sich nun die Linie, *vn*, mathematisch und unbiegsam, und oben mit einem kleinen Ringe versehn, vermittelst welches sie sammt der an ihr befestigten Last, *n*, an der schiefen Linie, *ac*, auf und abwärts verrückt werden kann. An den kleinen Ring bey *v* befestige man ferner die mathematische Linie, *vh*, parallel mit ihrer vorigen Lage in *ef*; und die Hand, die nun aus *f* in *h* versetzt wird, ziehe nach der Richtung, *vh*, die Last noch so stark als sie es in *f* that: so wird die Last, *n*, im Punete, *v*, hangend, mit der Kraft, *h*, im Gleichgewicht, nach eben dem Gesetz erhalten werden, welches Statt gefunden hätte, wenn die Last in *e* und die Kraft in *f* geblieben wär. Das ist: *h* wird sich zu *n* bey dem Gleichgewichte verhalten, wie *bc* zu *ab*.

Anmerkung.

§. 434. Diese Art, an der schiefen Linie Last und Kraft anzubringen, ist bey Betrachtung des Schraubenganges sehr vortheilhaft. Denn man wird hiermit manchen Schwierigkeiten entgehn, die sich, wenigstens Anfangs, zeigen würden, wenn man die Last so auf dem mathematischen Schraubengange liegend denken wollte, wie man sie auf der schiefen Linie in vorigen Sätzen gedacht hat.

Erklärung.

§. 435. Es stehe die mathematische, cylindrische Spin-

del,

del, *ab*, (*Fig.* 90.) eines unbeweglichen Schraubenganges, *aocd*, auf einer Horizontalebene unverrücklich. Irgendwo, etwa in *o*, sey am Schraubengange auf die Art, welche im (§. 433.) angegeben ward, eine Last, *m*, angehangen, die demnach bey *o* vermöge des in (§. 433.) angezeigten kleinen Ringes sich verrückbar gedenken läßt. (§. 432.) Die Linie, *om*, welche vertical gegen die horizontale Grundfläche der Spindel an ihrer gebognen Seitenwand herab geht, steht also auf dieser Grundfläche im Puncte, *f*, ihrer Peripherie perpendicular. Von ihr ziehe man im Puncte, *f*, eine Tangente, *gh*; so steht auch auf ihr die Linie, *of*, perpendicular. Nun halte in *e* eine Hand vermittelst der Linie, *eo*, deren Richtung in der Verticalfläche der Tangente parallel mit der letztern liegen soll, den kleinen Ring bey *o* an der Linie, *of*, welche die Last, *m*, trägt, so stark, daß *o* nach *a* herab nicht fortrücken kann, sondern daß vielmehr zwischen der Kraft, *e*, und der Last, *m*, das Gleichgewicht Statt findet. Unter welcher Bedingung dieses geschehe, soll jetzt gezeigt werden.

Aufgabe.

§. 436. Wie verhalten sich am mathematischen, unbeweglichen Schraubengange, unter den eben jetzt angegebenen Umständen, Kraft und Last gegen einander bey dem Gleichgewichte?

Auflösung.

Die Kraft verhält sich zur Last, wie die Weite des Schraubengangs zur Peripherie der Grundfläche von der Spindel.

Beweis.

Die Spindel, *ab*, (*Fig.* 90.) lasse man unbeweglich stehn, löse aber den um sie, nach der Vorstellung in (§. 428.) gebogenen Triangel von ihr ab, doch so, daß die

Linie,

Linie, of, nebst der Fortsetzung, fm, und die Last, m, nebst der Kraft, e, mit ihrer Wirkungslinie, oe, an den ersten Stellen bleiben. Der auf diese Art abgerollte und geebnete Triangel wird auf der Tangente, gh, die zum Puncte, f, in der Peripherie der Grundfläche von der Spindel gehört, sich vertical stehend darstellen, und seine Hypotenuse wird sogleich als eine schiefe, gerade Linie der zweyten Art, im engen Verstande, erscheinen; auf welcher nehmlich die Last, m, gegen die Grundlinie perpendicular, und die Kraft, e, mit derselben parallel wirkt; und das alles auf die besondre Art, welche in (§. 434.) empfohlen ward. Da muß denn, nach schon gegebenen Beweisen, bey dem Gleichgewichte die Kraft zur Last sich verhalten, wie die Höhe der schiefen Linie zu ihrer Grundlinie. Weil nun in dem Theile der schiefen Linie bey o, wo die Kraft und die Last gegen einander wirken, nichts, was auf das Gleichgewicht Einfluß haben könnte, anders war, da noch der Triangel die Spindel umgab, als es jetzt ist, da man ihn geebnet hat: so mußte auch damahls schon das Gleichgewicht Statt finden, wenn die Kraft zur Last sich verhielt, wie die Weite des Schraubengangs zur Peripherie der Grundfläche von der Spindel. Denn die erstre war, was jetzt die Höhe der schiefen Linie ist, und die letztre war, was jetzt die Grundlinie derselben heißt.

Zusatz.

§. 437. Es ändert sich in den Umständen, die auf das Gleichgewicht wirksam seyn können, nichts; wenn auch die Spindel nicht eben horizontal gestellt wird, sondern sich in irgend einer gegen die Horizontalfläche geneigten, aber doch unverrücklichen Lage befindet; in so fern nur das Verhältniß der Kräfte gegen einander und die Lage ihrer Richtungslinien im Bezug auf die Peripherie der Grundfläche von der Spindel unverändert beybehalten wird. Wär unter den Kräften eine Schwerkraft; so würde man

diese

diese dann, wie es oft bey dem Hebel geschah, über eine Rolle zu leiten haben. Uebrigens wird, bey der jetzt gesetzten Lage der Spindel, der Schraubengang eine unbewegliche, krumme, schiefe Linie der zweyten Art, im weiten Verstande, darstellen.

Aufgaben.

§. 438. Erstens. Wenn die Einrichtung des mathematischen, unbeweglichen Schraubengangs, das ist, wenn seine Weite sowohl als auch der Radius seiner Spindel gegeben ist, und überdieses die Kraft bekannt gemacht wird: wie soll für das Gleichgewicht die Last gefunden werden?

Zweytens. Und wie die Kraft, wenn die Einrichtung des Schraubengangs sammt der Last gegeben ist?

Drittens. Wie ist die Einrichtung des Schraubengangs für das Gleichgewicht zu finden, wenn Kraft und Last gegeben sind?

Auflösungen.

Die erste Frage zu beantworten, suche man Anfangs aus dem gegebenen Radius der Spindel, nach der bekannten geometrischen Regel, ihre Peripherie, und schließe dann: Wie die gegebene Weite des Schraubengangs sich verhält zur gefundnen Peripherie der Grundfläche von der Spindel; so wird sich verhalten die gegebene Kraft zur gesuchten Last.

Zur Beantwortung der zweyten Frage schließe man: Wie die Peripherie der Spindel zu der Weite des Schraubenganges sich verhält; so verhält sich die gegebene Last zur gesuchten Kraft.

Zur Beantwortung der dritten Frage schließe man: Wie sich verhält die gegebene Kraft zur gegebenen Last; so muß sich die gesuchte Weite des Schraubengangs verhalten zur gesuchten Peripherie der Spindel. Dann nehme man für die Weite des Schraubengangs eine beliebige

Linie, als etwa ein Viertel Zoll an; so wird sich, wenn die vierte geometrische Proportionalzahl gesucht wird, die Größe der Spindelperipherie in Zollen ergeben. Diese wird man beschreiben können, wenn man noch nach der geometrischen Regel ihren Radius in Zollen gesucht hat.

Beweis.

Alles ist klar aus (§. 436.) und aus den Auflösungen eben solcher Fragen bey den unbeweglichen, geraden, schiefen Linien der zweyten Art, aus welchen der unbewegliche Schraubengang hergeleitet worden ist.

Zusätze.

§. 439. Wo in die gegebenen Auflösungen das Verhältniß des Diameters zur Peripherie seines Zirkels Einfluß hat, da kann zwar die Antwort in Zahlen nie mathematisch genau gegeben werden, weil, wie in der Geometrie gezeigt ward, jenes Verhältniß bis jetzt noch nicht genau hat gefunden werden können: aber man kann doch der Wahrheit sich mehr und mehr nähern, so lange man nur will. (G. §. 438.)

§. 440. Was die natürlichen sowohl als die mechanischen Wege der Kraft und Last betrifft; so bleibt im Wesentlichen von ihnen hier alles wahr, was in Rücksicht ihrer bey der unbeweglichen, geraden, schiefen Linie der zweyten Art behauptet worden ist. Nur die Namen verschiedner Linien sind hier anders als dort.

Damit man nun für den natürlichen Weg der Kraft eine bestimmte Linie bekomme; so muß man die Kraft, *e*, (*Fig.* 90.) in ihrer Richtungslinie, *oe*, nicht eben in *e* denken, welcher Punct in der Linie, *oe*, ganz willkührlich ist, sondern sogleich unmittelbar vor der Last, *o*, auf dem Schraubengange, nach *e* her. Thut man dieses, so ist klar, daß der natürliche Weg der Kraft, wie auch der natürliche Weg der Last, die Länge des Schraubenganges selbst ist. Der mechanische Weg der Last aber, sobald sie mit dem

Puncte,

Puncte, *o*, den ganzen Schraubengang durchlaufen soll, wie hier gesetzt wird, ist die Weite desselben, *ad*, und der mechanische Weg der Kraft ist der Peripherie der Grundfläche von der Spindel gleich. Demnach verhält sich der mechanische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, wie die Peripherie der Spindel zur Weite des Schraubengangs, das ist, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewicht. Und eben so ist das Verhältniß der Geschwindigkeiten von Kraft und Last. Alles, wie bey der unbeweglichen, schiefen, geraden Linie der zweyten Art.

Erklärungen.

§. 441. Der bewegliche, mathematische Schraubengang ist zweyerley. (§. 431.) Schränkt sich seine Bewegung darauf ein, daß, sobald Kraft und Last auf ihn wirken, er sammt seiner Spindel sich nur um die Achse der letztern bewegt; so heiße er der einfach bewegliche Schraubengang. Hat derselbe aber außer dieser Bewegung zugleich noch eine andre, vermöge welcher seine Spindel in der Richtung ihrer Achse eine fortschreitende Bewegung annimmt; so nenne man ihn den zweyfach beweglichen Schraubengang.

§. 442. Den mathematischen, einfach beweglichen Schraubengang kann man sich etwa auf folgende Weise vorstellen. Die vertical stehende Spindel, *cd* (*Fig.* 91.) eines Schraubengangs, der seinen Anfang in *e*, seinen Fortgang in *ofg*, sein Ende in *m* hat, und dessen Weite die Linie, *em*, ist, sey zwar um ihre Achse, *ab*, drehbar, doch aber auf keine andre Weise verrücklich. Man denke daher die Hervorragungen, *a* und *b*, der Spindelachse in die Oeffnungen zweyer fest gestellten, ebenen, horizontalen Flächen, die aber in der Figur nicht mit verzeichnet sind, eingesetzt. In *o* hange am Schraubengange ein physischer Körper, *p*, als Last, vermittelst einer mathematischen, unbiegsamen Linie, die sich oben bey *o*, der Vorstellung in (§. 433 und 434.) gemäß, durch Hülfe eines Ringes am Schraubengange sowohl hinauf als herabwärts verschie-

ben läßt. Daß sie aber nach der letztern Richtung jetzt sich selbst nicht verschieben könne; so sey dem Ringe eine mathematische, gerade, unbiegsame Linie, hv, in verticaler, oder, welches hier gleich gilt, in paralleler Richtung mit der Spindelachse, unverrücklich entgegen gestellt. Wenn man es hierbey bewenden ließ; so würde durch das Vermögen der Last, p, in o der Schraubengang sammt der Spindel nach der Seite, f, zu hinumgedreht werden, und die Last müßte auf ihm herabsteigen, eben so wie in (*Fig.* 83.) die Kugel, der sich die feste Linie, vn, entgegen stellte, die schiefe, gerade Linie, df, nach m hin fort zu treiben und selbst zu sinken vermocht haben würde, wofern nicht der Hönlinie, ef, von m her in der Richtung nach o eine Kraft entgegen gesetzt worden wär. (§. 399.) Was nun in jener Figur die Höhe der schiefen Linie war, das ist in dem gegenwärtigen Falle (*Fig.* 91.) die Linie der Schraubengangsweite, em. Dieser also muß, wenn der Schraubengang nicht nach f hin umlaufen soll, eine mathematische, gerade, unbiegsame Linie, nk, in der Richtung von k nach n entgegen gestellt werden, und zwar parallel mit der Tangente des Punctes, e, der am untern Ende der Linie, em, in der Peripherie der Grundfläche von der Spindel liegt. Nun wird es möglich seyn, die Kraft der Anstämmung, die man einer Hand in k beylegen kann, so abzumessen, daß der Schraubengang in Ruhe bleibt, und die Kraft, k, mit der Last, p, im Gleichgewichte erhalten wird. Sobald aber dann die Kraft, k, einen kleinen Zusatz bekommt; so wird die Bewegung des Schraubengangs nach der Seite, c, hin erfolgen, und die Last, p, wird in Rücksicht des Punctes, o, auf dem Schraubengange an der fest gestellten Linie, vk, hinauf allmählig erhoben werden.

Zusätze.

§. 443. Das Gesetz des Gleichgewichts für den einfach beweglichen Schraubengang ist demnach eben so zu bestimmen, wie für die bewegliche, gerade, schiefe Linie (§. 404);

das

das ist: bey ihm findet sich das Gleichgewicht, wenn die Kraft, *k*, (*Fig.* 91.) zur Last, *p*, sich verhält, wie die Weite des Schraubengangs, *em*, zur Peripherie der Grundfläche der Spindel.

§. 444. Wenn bey anfangender Bewegung der Punct, *o*, (*Fig.* 91.) in welchem die Last, *p*, am Schraubengange wirkt, in *e* gesetzt wird, und der Wirkungspunct der Kraft, *k*, unmittelbar neben *n* in der Linie, *nk*; so wird bey einer vollen Umwendung der Spindel der natürliche sowohl als der mechanische Weg der Kraft gleich seyn der Spindelperipherie; beyderley Wege der Last aber werden der Weite des Schraubengangs, *em*, gleichen. Also verhält sich der mechanische Weg der Kraft zum mechanischen Wege der Last, wie die Peripherie der Spindel zur Weite des Schraubengangs, das ist, wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte. (§. 443.) Eben dieses Verhältniß haben auch die Geschwindigkeiten beyder Kräfte gegen einander.

Erklärungen.

§. 445. Den mathematischen zweyfach beweglichen Schraubengang (§. 441.) stelle man sich durch Beyhülfe der Zeichnung in (*Fig.* 92.) etwa auf folgende Weise vor. Daselbst erscheint die Spindel, *gk*, in einem verticalen Stande. Ihr Schraubengang, dessen Weite, *vy*, ist, fängt in *v* an, und zieht sich durch *n* hinum, bis er sich in *y* endigt. Die Achse der Spindel, welche mit ihr zugleich umlaufen kann, tritt durch ihre beyden Grundflächen bis *c* und *p* hervor. Damit sie aber nicht seitwärts aus dem verticalen Stande wanke; so ist sie bey *o* und *e* durch kleine Oeffnungen der zwey, übrigens undurchdringlichen und fest gestellten, horizontalen, mathematischen Flächen, *ab* und *df*, ohne Zusammenhang mit ihnen, hindurch geleitet. An ihrem obern Ende, *c*, sey eine mathematische, biegsame Linie, *csu*, befestigt, um eine mathematische Rolle der ersten Art, *su*, gelegt, und dann mit einem physischen

Ge-

Gewichte, *w*, als Last, beschwert. Dieses Gewicht zieht die ganze Spindel vertical aufwärts, und also auch den kleinen Theil, *n*, des Schraubengangs. Dem geraden Emporstreben dieses, *n*, aber widersetze sich die undurchdringliche und unverrückliche mathematische Linie, *nm*. Gegen diese nun geschieht von *n* aufwärts ein Druck vermöge der Last, *w*, und sie selbst hält diesem Drucke gleich stark wider; daß es nicht anders ist, als ob der Theil, *n*, des Schraubengangs von der Last, *w*, unmittelbar niedergedrückt würde. Es ist also hier vollkommen der Fall, der in (§. 442.) und in (*Fig.* 91.) bey dem Drucke in *o* sich fand; und es muß daher auch hier erfolgen, was dort als nothwendige Folge gezeigt ward, daß nehmlich auch hier die Spindel, *gk* (*Fig.* 92.) sich zu bestreben anfängt, nach der Seite, *h*, hin sich um ihre Achse zu bewegen. Dieses Bestreben aufzuhalten, stämme, wie dort, eine Hand, *h*, als Kraft, der Weite des Schraubengangs, *vy*, die Linie, *qh*, parallel mit der Tangente vom Puncte, *v*, entgegen; so wird die Spindel in Ruhe erhalten werden können. Da nun die Umstände, welche auf das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last hier Einfluß haben, wie in (§. 442.) beschaffen sind; so gilt auch hier die dort gefundne Regel für das Gleichgewicht: daß nehmlich bey demselben die Kraft, *h*, sich zur Last, *w*, verhält, wie die Weite des Schraubengangs, *vy*, zur Peripherie der Grundfläche von der Spindel.

§. 446. Um nun zu sehn, wie der Schraubengang sammt seiner Spindel *gk*, (*Fig.* 92.) die zweyfache Bewegung antritt, und sich eben hierdurch als der zweyfach bewegliche Schraubengang darstellt, gebe man der Kraft in *h* einen kleinen Zuschuß; so wird das Gleichgewicht zwischen ihr und der Last, *w*, die im Puncte, *n*, der festen Linie, *mn*, niederwärts gegen den Schraubengang wirkt, sogleich gehoben seyn; die Spindel wird nach der Seite, *g*, hin, sich um die Achse, *cp*, zu drehen anfangen, zugleich aber vertical, das ist, nach der Achsenrichtung, sich niederwärts

wärts bewegen müssen, weil immer höher und höher liegende Puncte des Schraubengangs unter die unbewegliche Linie, *m n*, bey *n* durch seine Drehung gebracht werden. Hätte man, um das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last zu heben, nicht der Kraft, *h*, sondern der Last, *w*, den Ueberschuß gegeben; so würde auch, wie jeder nun selbst bemerken kann, die Spindel nicht nach der Seite, *g*, sondern nach *k* hin um die Achse gelaufen, und würde nicht nieder-, sondern aufwärts gestiegen seyn.

Zusätze.

§. 447. Will man bey dem mathematischen, zweyfach beweglichen Schraubengange die natürlichen sowohl als die mechanischen Wege der Kräfte mit einander selbst und mit den Kräften vergleichen: so denke man erst, bey noch währendem Gleichgewichte, die Spindel, *g k*, (*Fig.* 92.) so gestellt, daß der Anfang, *v*, des Schraubenganges und das untere Ende, *n*, der festen Linie, *m n*, in einerley Puncte liegen. Ferner stelle man sich vor, daß die Peripherie der untern, undurchdringlichen (§. 432.) Grundfläche der Spindel mit einer biegsamen, mathematischen Linie umwunden sey, die in *v* befestigt und nach *g* hin herum gelegt ist, bis ihr Ende wieder in *v* trifft. Nun werde die Hand, welche vorhin in *h* nach der Richtung, *h q*, gegen die Linie, *v y*, so stark widerhielt, daß das Gleichgewicht bewirkt ward, von dort weggezogen; sie halte aber nun mit voriger Kraft das freye Ende der um die Grundfläche der Spindel gelegten Linie bey *v* nach Richtung der Tangente: so wird kein Zweifel seyn, daß das Gleichgewicht noch bestehe, weil alle zur Sache gehörigen Umstände dieselbigen geblieben sind. Hierauf bekomme die Hand einen Zuschuß von Kraft, so wird die Spindel sich nach *g* hin zu drehen anfangen, die Hand wird von ihr die biegsame Linie abwickeln und immer in einer Tangente ihrer untern Grundfläche fortrücken, bis die Spindel eine volle Wendung gemacht, und der Punct,

n, der festen Linie, *mn*, mit dem obern Grenzpuncte, *y*, des Schraubengangs zusammen kommt. Weil die Hand bey der Abwicklung sich immer in einer Tangente von der Grundfläche der Spindel erhalten muß, die Spindel aber bey ihrer Umrollung stets niedersteigt; so wird freylich die Hand in ihrem Fortzuge sich auch zugleich allmählig senken müssen: aber diese Senkung ist für ihren mechanischen Weg der anhaltend parallel mit der Horizontalfläche zu denken ist, nur Nebensache. Demnach ist der mechanische Weg der Kraft, bey einem Umlaufe der Spindel, der Peripherie ihrer Grundfläche gleich. Die erwähnte allmählige Senkung der Hand, die bey dem Sinken der Spindel parallel mit ihrer Achse und also im gegenwärtigen Falle vertical geschah, beträgt am Ende der Spindelwendung so viel, als die Weite des Schraubengangs, *vy*. Nun denke man den mechanischen Weg der Kraft, und an seinem Ende in freyer Luft niederwärts eine Linie perpendicular angesetzt, die der Weite des Schraubengangs und also auch der ganzen Senkung der Hand gleicht. Den so entstehenden rechten Winkel schließe man durch eine gerade Linie; so wird ein rechtwinkliger Triangel sich bilden, dessen Hypotenuse der natürliche Weg der Kraft, bey einem Umlaufe der Spindel, seyn muß. Diese Hypotenuse ist vermöge (§. 428.) dem Schraubengange gleich, und also gleicht der natürliche Weg der Kraft der Länge des Schraubengangs. Der natürliche sowohl als der mechanische Weg der Last ist leicht zu erkennen. Er gleicht nehmlich der Linie, durch welche die Last, *w*, bey einem Umlaufe der Spindel aufsteigt, das ist, der Weite des Schraubengangs. Der natürliche Weg der Kraft verhält sich demnach zum natürlichen Wege der Last, wie die Länge des Schraubengangs zur Weite desselben; und der mechanische Weg der Kraft verhält sich zum mechanischen Wege der Last, wie die Peripherie der Spindel zur Weite des Schraubengangs, oder wie die Last zur Kraft bey dem Gleichgewichte. Eben so verhalten sich die Geschwindigkeiten von Kraft und Last gegen einander.

§. 448.

§. 448. Alle Sätze von dem einfach und von dem zweyfach beweglichen Schraubengange bleiben wahr, wenn auch die Spindel nicht, wie bisher gesetzt ward, in einer verticalen Stellung steht; wenn nur die Richtungslinien der Kräfte in Absicht der Achse und der Peripherie der Spindel, wie vorhin, eingeleitet werden. Denn auf ihnen beruhte die Hauptsache.

§. 449. Die dreyfache Aufgabe, welche in (§. 438.) den unbeweglichen Schraubengang betrifft, wird jeder nun selbst leicht auch auf den beweglichen von beyden Gattungen anzuwenden wissen.

Erklärungen.

§. 450. Wenn mehrere mathematische Schraubengänge, die einander gleich und ähnlich sind, so in eine Verbindung gebracht werden, daß die sämmtlichen Spindelachsen eine ununterbrochen fortgehende gerade Linie ausmachen, und der eine Schraubengang sein Ende jedes Mahl mit dem Anfange des folgenden vereinigt: so entsteht eine mathematische Schraube. (*Fig.* 93.)

§. 451. Die in (*Fig.* 93.) vorgestellte Schraube ist aus vier Schraubengängen zusammengesetzt. Der erste von unten herauf fängt in *a* an, und endigt sich in *b*. Von *b* fängt der zweyte an und läuft hinum bis in *c*, u. s. w. Zusammen machen sie eine gleichförmig fortgehende Schraubenlinie aus, deren Anfang in *a* und deren Ende in *d* ist. Der ganze Cylinder, *ad*, um den die Windung geschieht, und welcher die Spindeln der vier einzelnen Schraubengänge in sich hält, heißt nun die Spindel der Schraube; und die Achse dieses Cylinders ist also zugleich die Achse der Schraubenspindel. Wenn man die Weite des untersten Schraubenganges, welcher hier die gerade Linie, *ab*, ist, mit dem Zirkel faßt; so weiß man die Weite aller Gänge der Schraube; denn sie bleibt in allen gleich groß.

Die

Die Peripherie einer Grundfläche der cylindrischen Spindel heißt die Peripherie der Schraube überhaupt.

§. 452. Die erklärten und betrachteten Gattungen des Schraubengangs, welcher gleichsam eine kurze Schraube war, kommen nun auch bey der Schraube selbst vor. Auch sie ist, wie jener, unbeweglich oder beweglich; und wenn sie beweglich ist, hat sie entweder einfache oder zweyfache Beweglichkeit. Die Wahrheiten, welche vom Schraubengange erwiesen, die Fragen, welche seinetwegen beantwortet wurden, sind auch anwendbar auf die Schraube. Wer jenen Vortrag gefaßt hat, wird nun von selbst alles auf sie übertragen, erklären und beweisen können. So ist z. B. bey der Schraube, wie bey dem betrachteten einzelnen Schraubengange, das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last vorhanden, wenn sich die erstere zur letztern verhält, wie die Weite eines Schraubengangs zur Peripherie der Schraubenspindel, u. s. w.

§. 453. Was bisher vom Schraubengange und der Schraube gesagt worden ist, betraf vermöge (§. 427.) den cylindrischen Schraubengang und die cylindrische mathematische Schraube; und zwar, insofern die Spindeln von beyden die Schraubenlinie auf ihren äußern Flächen tragen. Man kann sich aber auch einen mathematischen, cylindrischen Körper vorstellen, in welchem, durch Herausnahme eines kleinern Cylinders, der mit jenem einerley Achse hat, ein cylindrischer Raum entsteht, in welchem man keinen mathematischen Körper denken will. An der innern Grenzfläche des ausgehöhlten, größern Cylinders kann man sich nun eben so leicht Schraubengänge vorstellen, als man es an einer äußern Cylinderfläche konnte. Man würde hiermit mathematisch in der Hauptsache dasjenige haben, was man bey Arbeiten dieser Art in Metall eine Schraubenmutter nennt. Solche Schraubengänge lassen übrigens eben die Wahrheiten von sich behaupten, welche von den äußern erwiesen worden sind, weil es bey beyden

auf

auf die mathematische Schraubenlinie ankommt, die dort wie hier von einerley Beschaffenheit bleibt.

§. 454. Auch um die äußere, gebogene Grenzfläche eines mathematischen Conus können Schraubengänge gelegt werden, und so entsteht eine conische Schraube. Die Wirkungen aber einer Kraft gegen eine Last an ihr lassen sich hier nicht gründlich erklären, weil dazu die Anfangsgründe der Geometrie im ersten Bande dieses Lehrbuchs nicht weit genug haben ausgeführt werden können. In Vergleichung mit einer solchen conischen Schraube mußte man die vorhin betrachteten mit dem Beysatze, cylindrisch, bezeichnen, wie in (§. 453.) geschah.

Zusätze.

welche die physische Schraube betreffen.

§. 455. Wenn eine Schraube, zum Gebrauch im bürgerlichen Leben, für sich, oder als Theil eines nutzbaren künstlichen Werkzeugs angewendet werden soll; so muß sie aus irgend einer festen Materie, aus Holz, Horn oder Metall zubereitet seyn. Dann heißt sie, zum Unterschied von der bisher betrachteten mathematischen, eine physische Schraube. Ihre Spindel kann cylindrisch seyn, und dann heißt die Schraube selbst cylindrisch, oder schlechthin eine Schraube. Dergleichen ist die Schraube, die durch den Kopf eines guten Handzirkels zu gehen pflegt. Ist die Spindel einer physischen Schraube conisch; so kann die Schraube selbst conisch genennt werden. Dergleichen sind die stählernen Holzschrauben; es gehört auch der untre Theil des gemeinen Nagelbohrers hierher. Es kommen auch zuweilen an einer und derselben Schraube beyde Umstände zusammen; ihr größerer Theil ist cylindrisch, ihr kleinerer, gegen die Spitze zu, ist conisch.

§. 456. Die physische, cylindrische Schraube ist entweder an ihrer Außenseite von den Schraubengängen umwunden; oder dieselben befinden sich an der Grenzfläche

einer

einer cylindrischen Aushöhlung. Im letzten Falle nennt man sie eine Schraubenmutter oder bloß eine Mutter. (§. 453.) Eine solche Mutter wirkt, ordentlicher Weise, was sie wirken soll, in Verbindung mit einer Schraube, deren auswendige Gänge in die Vertiefungen innerhalb der ihrigen passen, doch so, daß daher keine Klemmung entsteht. Schrauben mit ihren Muttern findet man an den Serviettenpressen, wie auch an den Pressen in Buchdruckereyen.

§. 457. Die Schraubengänge der physischen Schrauben können unmöglich, wie bey den mathematischen, Linien seyn; sondern sie sind, wie ihre Spindeln, physischkörperlich, und müssen daher, außer der Länge, auch einige Breite und Dicke haben. Sie sind aber nicht bey allen Schrauben von einerley äußerlicher Form. Anders sind sie geformt bey Schrauben, die in Muttern laufen, dergleichen im vorigen Paragraph angeführt sind; anders bey Holzschrauben, das ist bey solchen, die vermittelst der Hand in Holz eingeschraubt werden sollen, so daß ihre Gänge, wie auswärts gebogene feine Messerklingen, sich selbst in die Holzmaterie allmählig einschneiden.

§. 458. In Absicht der Beweglichkeit oder Unbeweglichkeit physischer Schrauben bemerke man Folgendes. In manchen Fällen bleibt die Schraubenmutter unbeweglich, und nur die vermittelst ihrer Beyhülfe arbeitende Schraube hat Bewegung. So ist es bey der Druckerpresse. In andern Fällen ist die Schraube unbeweglich, aber ihre Mutter wird bewegt. Dieses kommt bey mehrern Instrumenten vor, deren Theile bald stärker, bald schwächer, zusammengeschraubt werden sollen; z. B. an den Köpfen der meisten Hanozirkel, wo eine durch den sogenannten Zirkelschlüssel bewegbare Schraubenmutter das Gewinde wieder strenger macht, wenn es locker geworden ist. Bey manchen Schrauben endlich gilt es gleich, ob man die Schraube unbeweglich läßt und nur die Mutter dreht, oder ob man

die

die letzte unbeweglich läßt und nur die erste dreht. So findet man es an den bekannten grünen Lichtschirmen, die zirkelrund sind, und dem Lichte vorgesetzt, an der Schraube ihres Fußes sich, vermittelst einer Mutter, bald höher, bald niedriger stellen lassen. Hält man die Mutter, so kann man die Schraube durch sie fortbewegen; hält man die Schraube, so kann man um sie die Mutter in Bewegung setzen: und man thue dieses oder jenes, so erreicht man die verlangte Stellung des Schirms.

§. 459. Manche Schrauben, wenn sie in Wirksamkeit gesetzt werden sollen, bedürfen der Verbindung mit einer Mutter. Dieses kann man sich leicht an der Schraube einer Druckerpresse erläutern. Für andre ist es nicht nöthig, eine Mutter zu ihrer Beyhülfe auszuarbeiten; denn sie brauchen dieselbe entweder zu ihrer Wirkung nicht, oder bereiten sich solche selbst zu. Den ersten Fall trifft man bey der Schraube an, welche mit ihren Gängen in die Zähne eines Rades greift und es umtreibt. Sie wird die Schraube ohne Ende genennt und kommt bey der Schraubenmaschine vor. In (*Fig.* 94.) ist sie flüchtig vorgestellt. Ihre cylindrische Spindel, *a b*, denke man bey *a* und *b* auf Widerlagen so ruhend, daß man sie vermittelst der Kurbel, *c*, umdrehen kann. Bey *d* hat sie drey Schraubengänge, welche in die Zähne eines Sternrads eingreifen, *f*, und es, nachdem die Kurbel auf diese oder jene Seite gewendet wird, entweder von *f* nach *g*, oder nach *h* hinum in Bewegung setzen. Jeder Umlauf der Schraubenspindel rückt das Rad um einen Zahn und seine Zwischentiefe fort. Es erscheint sogleich, daß eine Mutter für eine solche Schraube kein Bedürfniß sey.

Den zweyten der angezeigten Fälle, wo für eine Schraube keine Mutter im voraus bereitet werden darf, weil sie erst bey dem Gebrauch sich dieselbe gleichsam selbst verfertigt, findet man bey den Holzschrauben. Wenn diese mit ihren scharfen Gängen in Holz eingeschraubt werden, so schnei-

den

den sie, wie sie nach und nach tiefer eindringen, sich selbst eine Mutter in die Holzmaterie. An den untern Theil eines gemeinen Nagelbohrers kann man hier auch denken.

§. 460. Die physische Schraube ist entweder die einfach oder die zweyfach bewegliche. (§. 441.) Die einfach bewegliche kommt an Werkzeugen vor, wo die Absicht ist, die Schraubengänge in die Zähne eines Rades eingreifen zu lassen, damit dasselbe durch Drehung der Schraube um seine Achse getrieben werde. (*Fig.* 94.) Hier macht die Schraube nur Wendungen um ihre Achse, rückt aber mit derselben nicht gerade fort. Es werden schon ihre Widerlagen bey *a* und *b* darnach eingerichtet, daß ihr die letztre Art der Bewegung nicht möglich bleibt, weil sie hier dem Endzwecke der Bewegung zuwider wär. Die zweyfach bewegliche Schraube thut ihren Dienst unter andern an der Buchdruckerpresse, wo sie sich nicht nur um ihre Achse dreht, sondern auch nach derselben Richtung den Niederdruck auszuführen, in gerader Linie fortrückt. Bey dem in (§. 458.) angeführten Lichtschirme wird die Schraube zweyfach beweglich erscheinen, wenn man bey ihrer Drehung die Mutter fest hält; und die Mutter wird zweyfach beweglich seyn, wenn bey ihrer Wendung die Schraube fest gehalten wird.

§. 461. Die Gesetze und Fragen, welche den mathematischen Schraubengang und die mathematische Schraube betrafen, und welche an ihrem Orte abgehandelt worden sind, können und sollen zwar auch auf alle Gattungen der physischen Schrauben angewendet werden: allein dieses muß mit gar mancher Einschränkung und vieler Umsicht geschehen; und bey dem allen läßt sich doch die Größe der Wirkung einer physischen Schraube nie im voraus mit mathematischer Genauigkeit bestimmen. Denn nicht nur die Friction, welche bey der Schraube immer beträchtlich ist, obwohl bey einer ihrer Gattungen mehr, bey der andern weniger, sondern auch die Breite und die Form

der

der Schraubengänge, und besonders noch der Umstand, daß auf letztere die Last nicht überall mit der Spindelachse parallel wirken kann — dieses zusammen macht das Gesetz des Gleichgewichts, wie es für die mathematische Schraube gefunden ward, auf die physische nicht vollkommen anwendbar, sondern nur einigermaßen. Doch nähert es sich auch bey ihr in der Anwendung der Genauigkeit immer mehr, je weniger breit die Schraubengänge sind, und je geringer die Last ist, welche bewältiget werden soll. Die Kraft gewinnt auch mehr Vortheil bey Schrauben, die in Muttern laufen, welche für sie, schon vor ihrem Gebrauche, zugerichtet sind, als bey solchen, die sich im Gebrauche erst ihre Mutter selbst ausarbeiten müssen. (§. 457.) Dem allen ungeachtet bleibt die physische Schraube dennoch ein sehr nützliches, und auch für die Kraft zu Ueberwältigung der Lasten vortheilhaftes Kunstwerk.

§. 462. Die Hand, h, (*Fig.* 92.) konnte durch den Druck der Linie, hq, gegen die Weitenlinie, vy, des mathematischen Schraubengangs, vny, auf die Umdrehung seiner Spindel wirkend, allerdings gedacht werden. Auf diese Weise aber kann man die Umdrehung der Spindel einer physischen Schraube nicht bewirken. Wenn man hier das einfachste Mittel, welches doch noch nicht das bequemste wär, zu ihrer Umdrehung gebrauchen wollte: so müßte die Hand die Schraubenspindel selbst so anfassen, wie etwa ein glatter Cylinder angefaßt wird, wenn er um seine Achse gedrehet werden soll; sie müßte sich dann immer nach Tangenten der angefaßten Stellen mit der Schraube herum bewegen. Bey dem Gleichgewichte zwischen der Kraft in der drehenden Hand, und der Last, welche die Schraube zu überwinden hätte, würde die Kraft zur Last sich verhalten, wie die Weite eines Schraubengangs zur Peripherie der Spindel; doch, den vorigen Erinnerungen gemäß, auch unter den bequemsten Einrichtungen, nur ungefähr. (§. 461.) Nach diesem Gesetz der

mas

mathematischen Schraube würde nehmlich bey der physischen die Kraft um weniger oder mehr zu klein gefunden werden, als daß sie wirklich mit der Last das Gleichgewicht hielt.

§. 463. Wenn der Schluß, der im vorigen Paragraph von der physischen Schraube gemacht ward, zu einer Berechnung wirklich angewendet werden soll: so ist nöthig, die Weite eines Schraubengangs sowohl, als die Peripherie der Spindel messen zu können. Die erstere wird gefunden, wenn man durch Hülfe eines Handzirkels die mit der Spindelachse parallele Linie faßt, welche an den äußern Grenzen zweyer, sich unmittelbar folgenden, Schraubengänge von der obern Fläche des einen bis zur obern Fläche des andern sich erstreckt. Die Peripherie der Spindel zu finden, messe man nur ihren Diameter, aus welchem sie dann nach der Geometrie zu berechnen ist. Dieser Diameter aber darf nicht an der sichtbaren Spindel der physischen Schraube selbst gemessen werden, denn dieses darf nur bey der mathematischen Schraube geschehn, wo der Schraubengang eine Linie ist. Die Schraubengänge der physischen hingegen haben oben und unten Flächen zu ihren Grenzen, und breiten sich also von der Spindel abwärts aus. Auf diesen Flächen der Gänge lassen sich gar viele Schraubenlinien neben einander denken, deren eine immer enger oder weiter ist als die andre, und also einer schwächern oder stärkern Spindel zugehört. Man messe also, um nicht zu weit von der Wahrheit abzuweichen, den Diameter derjenigen unsichtbaren Spindel, welche zu der mittelmäßig weiten Schraubenlinie von den vielen, die auf den breiten Schraubengängen liegen können, gehöret; und dieser wird erlangt, wenn man zum Diameter der sichtbaren Spindel die Breite eines Schraubenganges hinzu addirt. An der äußern Fläche dieser so berechneten Spindel müßte nun der unmittelbare, drehende Angriff der Hand geschehn, von dem im (§. 462.) gesagt ist. Dieses ließ sich auch thun, wenn, wo die Schraube zu Ende

geht

geht, sich noch ein Cylinder für den Angriff fortsetzte, dessen Radius dem Radius der berechneten Spindel gleich wär.

§. 464. Daß die Kraft theils bequemer, theils vortheilhafter an einer physischen Schraube wirken könne, als es vorläufig in (§. 462.) vorgestellt ward, läßt sich durch verschiedne Einrichtungen zu Wege bringen. Man giebt, z. B., der Schraube einen solchen Angriff oder Kopf, wie ihn etwa die Schlüssel zu ihrer leichtern Umdrehung haben, oder man bringt an ihr eine Kurbel an, *b c*, (*Fig.* 94.), oder man setzt ihr, unter einem rechten Winkel gegen die Spindelachse, einen langen Arm ein, der ihr das Ansehen einer einarmigen Winde giebt, und ein Ziehbengel, oder auch bloß ein Bengel, genennt wird. Auf diesen läßt man die Kraft, perpendicular von der Seite her, wirken, und verstärkt sie dadurch sehr. Um dieses deutlicher zu machen, stelle *a b* (*Fig.* 95.) einen Theil der physischen, wirklichen Schraubenspindel vor, die Linie, *c d*, aber einen Radius derjenigen, die vermöge des vorigen Paragraphen berechnet ist. Die Linie, *c f*, sey die Länge des Ziehbengels, von der Spindelachse, *c h*, an genommen, bis dahin, wo die Kraft einer Hand in *f* auf ihn wirken soll. Hiermit hat man einen Hebel der ersten Art, *d c f*, vor sich, dessen Ruhepunct in *c* ist. Wenn nun an ihm in *f* und *d* Kräfte gedacht werden, die in einerley Ebene seiner Richtung auf ihn perpendicular wirken; so muß sich der Lehre vom Hebel gemäß, bey dem Gleichgewichte, verhalten:

$$f : d = cd : cf.$$

So viel Mahl demnach ein Radius, *c d*, der berechneten Spindel in der Länge, *c f*, des Bengels enthalten ist: so viel Mahl mehr wird, bey irgend einer Belästigung der Schraube, eine Kraft, am Bengel in *f* angebracht, auf die Bewegung der Spindel wirken; als wenn eben dieselbe Kraft in *d*, das ist, unmittelbar an der berechneten Spindel selbst, angebracht wär. (§. 463.)

Auf eben die Weise kann man leicht entdecken, wie groß der Vortheil ist, den eine Kurbel, oder auch nur ein etwas breiter Schraubenkopf, der drehenden Kraft gewähren muß.

§. 465. Wenn an unbeweglichen, physischen Schrauben bewegliche Muttern vorkommen; so pflegt man den letztern an ein paar Seiten zum Angriff sogenannte Flügel zu geben. Auch bey diesen läßt sich der Vortheil, den sie der drehenden Kraft gewähren, aus der Hebellehre, wie vorhin bey dem Bengel, nicht schwer erklären.

§. 466. Die Last, welche an einer Schraube durch die Kraft überwunden werden soll, zeigt sich auf sehr verschiedene Art, davon nur eine und die andre hier anzuführen ist. Sie liegt bey dem Gebrauche mancher Schrauben in dem schwächern oder stärkern Widerstande der Materie irgend eines festen Körpers, welche von der Schraube vermittelst einer angewandten Kraft nicht nur auseinander getrennt, sondern auch in eine engere Beschränkung gebracht und folglich zusammen gedrückt werden soll. So findet man es bey den Holzschrauben. Wenn diese in ein Bret eingedrehet werden; so macht sich die Spindel, sammt ihren schneidenden Schraubengängen, in der Holzmaterie Raum, der gleichsam ihre Mutter wird. Das Holz muß demnach zertrennt, und da es nicht ausweichen kann, in einen engern Bezirk gedrängt werden; welches nicht ohne Widerstand geschieht. Bey der Anwendung andrer Schrauben kommt es zwar bey der Last nicht auf die gewaltsame Trennung einer festen Materie, aber doch auf ihre zu erzwingende Zusammenpressung an. Dieses finden wir so bey den Serviettenpressen, wie auch bey den Pressen in Buchdruckereyen. Ein ander Mahl soll ein harter Körper nicht zusammengepreßt, sondern seine Theile sollen durch die Kraft an der Schraube zerrissen werden. In dieser Absicht bedienen sich schon

Kinder

Kinder der Schraube bey dem Gebrauch des bekannten kleinen Nußknackers. Hier ist die Last im Zusammenhange der Theilchen von der Nußschale zu suchen, die zerbrochen werden soll. Es giebt auch Schrauben, bey welchen die Last weder eine Pressung noch eine Trennung ist, sondern darauf beruht, daß der Schraubengang einen festen Körper, der sich ihm entgegen stämmt, forttreiben soll. Auf diese Art zeigt sich die Last an der Schraubenmaschine (*Fig.* 94.) Es sey xw eine festliegende schiefe Fläche, deren Grundfläche, xy, horizontal ist. Auf ihr liege eine Last, p, die für sich nach x herabzugleiten strebt. Dieses verwehre ihr aber ein Seil, das bey w angehangen, dann um eine Rolle der zweyten Art, v, welche mit der Last, p, in Verbindung steht, herumgeführt, und endlich auf die Welle, u, des Sternrades, n, gewickelt und an ihr befestigt ist. Die Last wird sich bestreben, die Welle sammt dem Rade so umzutreiben, daß der Zahn desselben, k, nach der Seite der Last, p, hin fortrücken müßte. Diesem Zahne aber stelle sich ein Zahn des Getriebes, m, entgegen, das mit dem zweyten Sternrade, g, in Verbindung steht. Dieses wird, wenn kein neuer Widerhalt da ist, mit seinen Zähnen bey f nach der Richtung, fh, zu laufen anfangen. Doch in diese Zähne treffe die Schraube ohne Ende, d, mit ihren Gängen ein, und thue ihnen Widerstand. Die Stärke dieses Drucks der Radzähne gegen die Schraubengänge ist hier im Bezug auf die Schraube zunächst für ihre Last anzusehn; obwohl der Körper, p, die eigentliche Last in Rücksicht der ganzen Maschine bleibt. Ist nun die Spindel, ab, gehörig in Widerlagen eingelegt, und eine Hand faßt die Kurbel bey c; so wird durch die Kraft der Hand die Kurbel nach einer solchen Richtung gedrehet werden können, daß durch den Umlauf der Schraubengänge die an sie sich stämmenden Zähne, als nächste Last, fortgetrieben, und durch Beyhülfe des ganzen Räderwerks sammt der Rolle, der lastende Körper, p, selbst, auf des-

sen Bewegung die ganze Anlage zielt, über die schiefe Fläche herauf gehoben wird.

§. 467. Endlich ist noch an einigen Beyspielen zu zeigen, auf welche Weise jede besondre Einrichtung der physischen Schraube mit irgend einer Art der vorhin erklärten mathematischen Schraubengänge verglichen werden kann; wenn man die Anlage der physischen beurtheilen und über ihre Wirkung nachdenken will.

Erstes Beyspiel. Auf den mathematischen, unbeweglichen Schraubengang der in (*Fig.* 90.) vorgestellt ward, wo die Last, *m*, im Puncte, *o*, wirkte, und durch die Kraft, die nach der Richtung, *oe*, zog, im Gleichgewicht erhalten oder bewegt ward, ist zurück zu sehn bey physischen Schrauben, welche die Einrichtung und Absicht haben, die an dem Schraubenwerke des Lichtschirms (§. 458.) vorkam. Wenn bey diesem der Fuß fest gehalten wird; so ist er eine unbewegliche Schraube wie (*Fig.* 90.). Die Last bey ihm ist der Schirm selbst, sammt dem hölzernen kurzen Arme, der ihn trägt, und vermittelst seiner Mutter auf die Schraubengänge drückt, wie der lastende Punct, *o*, in der angezeigten Figur auf den Gang der Spindel drückte. Auch die Kraft in der Richtung, *oe*, wirkte dort so, wie bey dem Schirme eine Hand wirkt, die seine Mutter um die Schraube dreht. Der Schirm erhebt sich dann allmählig an der Schraube, wie sich dort der Punct, *o*, nebst seinem Gewichte, *m*, allmählig erhob, u. s. w. (§. 435.)

Zweytes Beyspiel. Auf die mathemathische, einfach bewegliche Schraube in (*Fig.* 91.), wo die Last bey *o*, die das ziehende Gewicht, *p*, verursachte, von der festen Linie, *hv*, aufgehalten ward, daß sie auf dem Schraubengange fortrücken mußte, sobald derselbe durch die Kraft, *k*, nach der Richtung, *kn*, um die Achse gedrehet zu werden anfieng, muß man bey Betrachtung der physischen Schraube

ohne

ohne Ende (*Fig* 94) zurückfohn. Denn auch sie ist nur einfach beweglich, und die Last, welche zunächst im Andrucke der Zähne des Sternrades, *f*, gegen die Schraubengänge, *d*, zu denken ist, wird durch den Zusammenhang der Maschine, wie dort durch eine feste Linie, an ihrer Stelle so erhalten, daß sie den Gegendruck der Schraubengänge annehmen, und auf ihnen vermittelst der drehenden Kraft bey *c* sich fortdrängen lassen muß. Daß die gedruckten Zähne auch mit der Radperipherie im Zirkel fortrücken, darauf darf man hier nicht achten, denn andre treten immer in die Stelle der weichenden, und so bleibt auf das ganze Rad der Schraubendruck anhaltend derselbige. (§. 445.)

Drittes Beyspiel. Auf den mathemathischen, zweyfach beweglichen Schraubengang in (*Fig.* 92.) ist bey der zweyfach beweglichen, physischen Schraube, dergleichen diejenige ist, welche bey der Buchdruckerpresse angewendet wird, Rücksicht zu nehmen. Denn wie sich dort im Puncte, *n*, eine feste Linie, *m n*, gegen den Schraubengang stämmt und er dadurch, sobald die Kraft in *h* wirket, genöthigt wird, nieder zu steigen; so muß die Druckerschraube, so bald sie durch den Bengel gewendet wird, ein Gleiches thun, weil die Mutter, wie dort die feste Linie, sie immer niederhält Fängt sie nun an auf den Gegenstand, der ihr zur Pressung untergelegt ist, wirklich zu drucken; so widersteht derselbe und druckt eben so stark zurück, als er gedruckt wird. Es ist nun nicht anders, als ob die physische Schraube von einem Gewichte aufwärts gezogen würde, wie dieses der mathematische Schraubengang vom Gewichte, *w*, (*Fig.* 92.) wirklich ward, und die Kraft am Bengel diesem Gewichte entgegen arbeiten müßte.

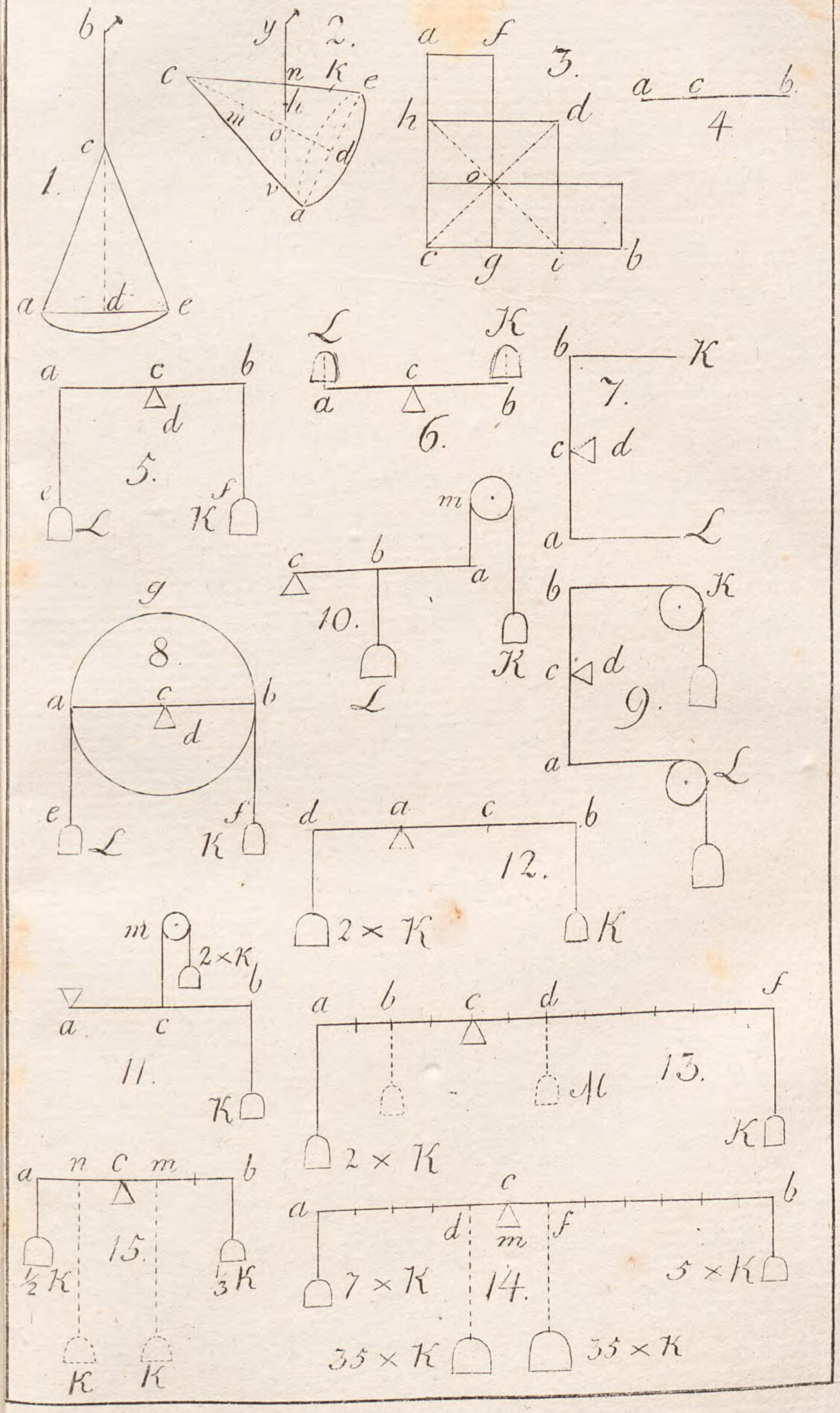
Erklärungen.

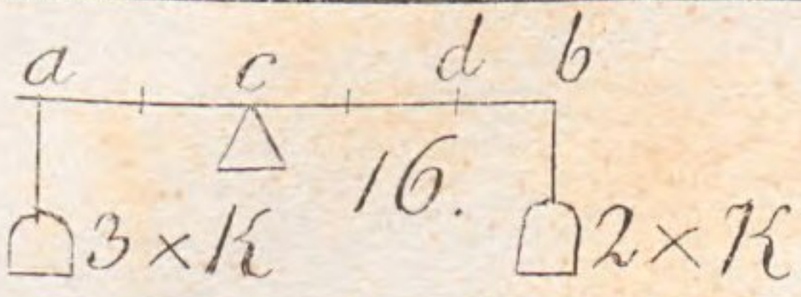
§. 468. Der Hebel, die Rolle der zweyten Art, das Rad an der Welle, die schiefe Linie oder Fläche, der Keil

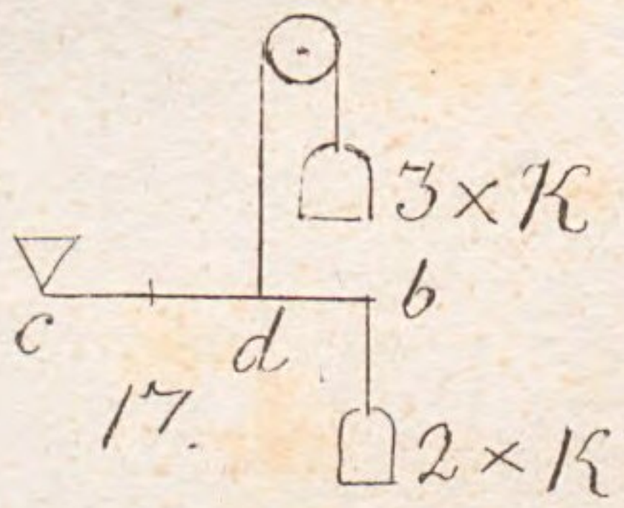
und

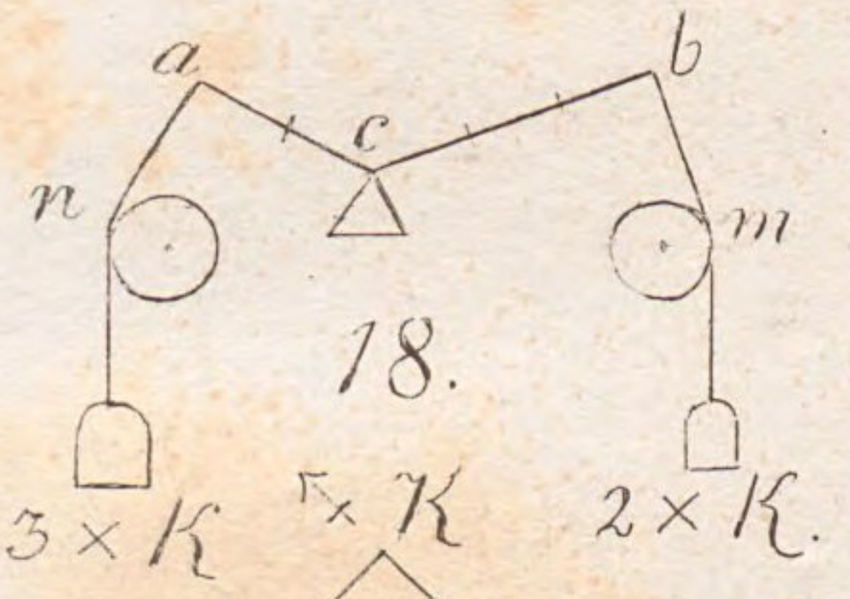
und die Schraube, welche sämmtlich bisher betrachtet worden sind, werden gemeiniglich die sechs einfachen Maschinen genennt. Wer fünfe zählen will, nimmt Keil und Schraube unter eine Nummer zusammen. Wenn man genauer verfahren will, kann man ihrer nur zwey zählen, nehmlich den Hebel und die schiefe Fläche. Denn die Rollen und Räder sind offenbar Hebel unter veränderten Gestalten, und eben so sind Keile und Schrauben nur Abänderungen von schiefen Linien oder Flächen. Dieses ist aus den bisher ausgeführten Betrachtungen für sich klar.

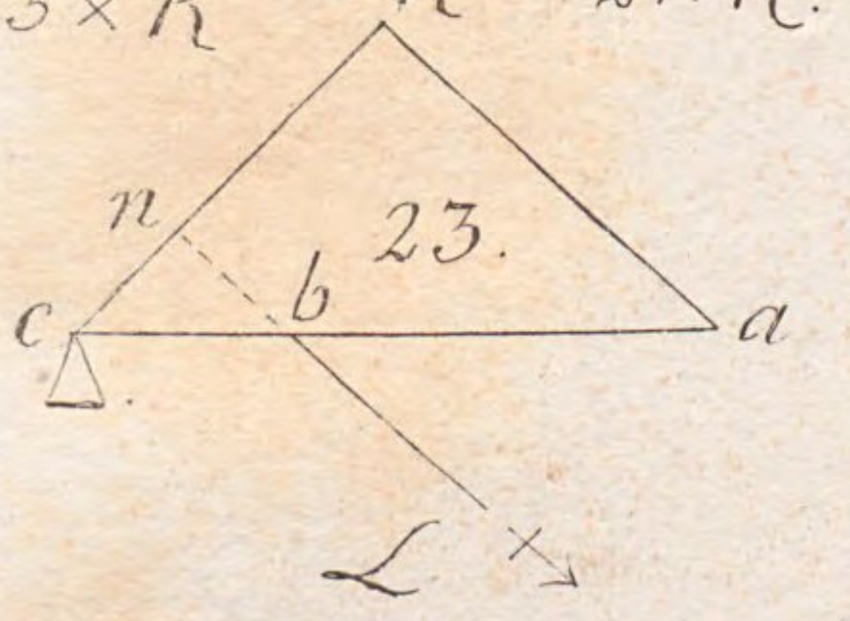
§. 469. Aus den genannten einfachen Maschinen entstehen nun zusammengesetzte. Die Zusammensetzung kann entweder so geschehen, daß eine und dieselbe einfache Maschine in einem Kunstwerke mehrere Mahle angewendet wird. So waren, zum Beyspiel, der zusammengesetzte Hebel (*Fig.* 38), ingleichen das Räderwerk, (*Fig.* 71.) zusammengesetzte Maschinen; doch in der erstern zeigte sich nur der Hebel, in der letztern nur das Rad, einige Mahl wiederholt. Es werden aber oft auch Werkzeuge so angelegt, daß in ihnen von den sechs einfachen Maschinen verschiedene zugleich wirken. Man erinnere sich hier an die Schraubenmaschine (*Fig.* 94.). Bey ihr zeigte sich in der Kurbel, *b c*, ein Hebel. Es wurden da Räder, *h* und *n*, mit und ohne Getriebe gebraucht. Und übrigens waren noch die Rolle der zweyten Art, *v*, die schiefe Fläche, *xw*, und die Schraube, *d*, angebracht. Wollte man bey diesem Werkzeuge sich statt der Rolle, *v*, eines Flaschenzugs bedienen, der noch stärker als jene wirken würde: so könnten in dieses Kunstwerk, außer den Rollen der zweyten Art, auch noch Rollen der ersten aufgenommen werden.

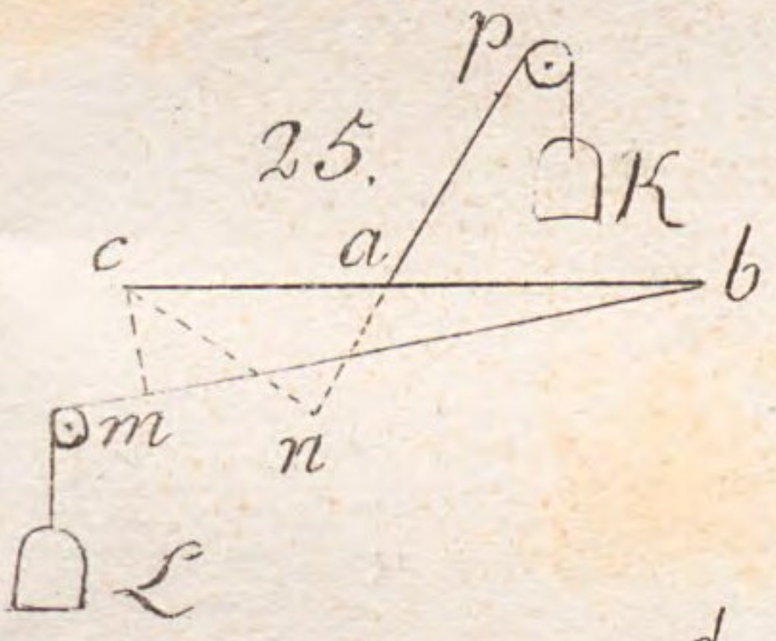

1.
2.
3.
4
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.

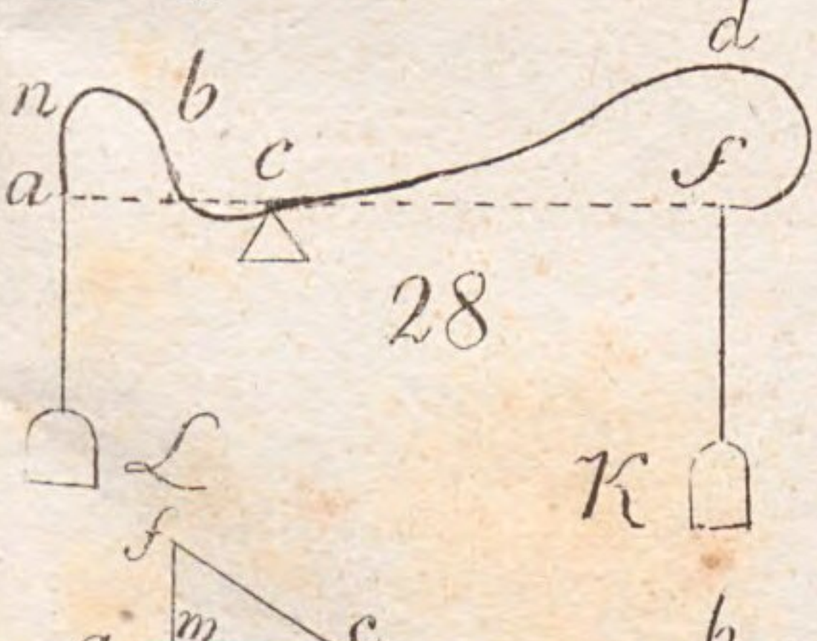

a c d b
3×K
16.
2×K

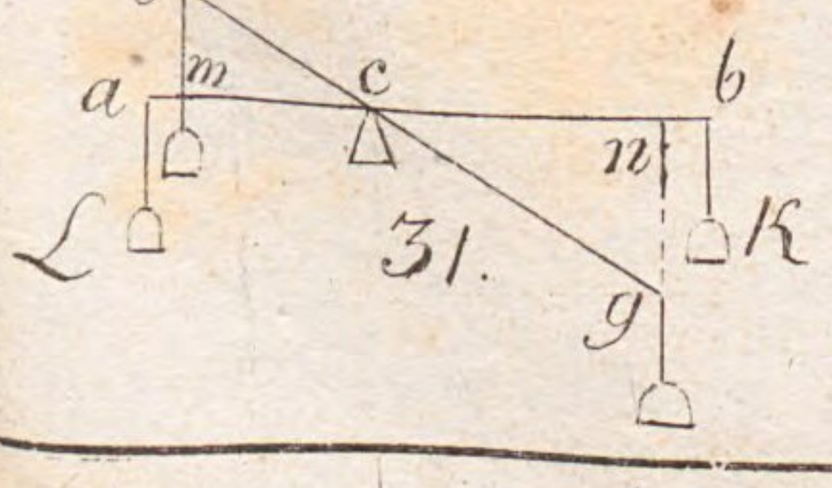

3×K
c
b
d
17.
2×K

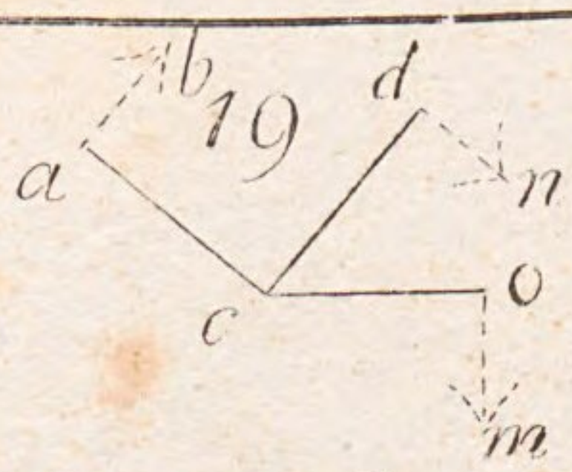

a
b
c
n
m
18.
3×K
K
2×K.

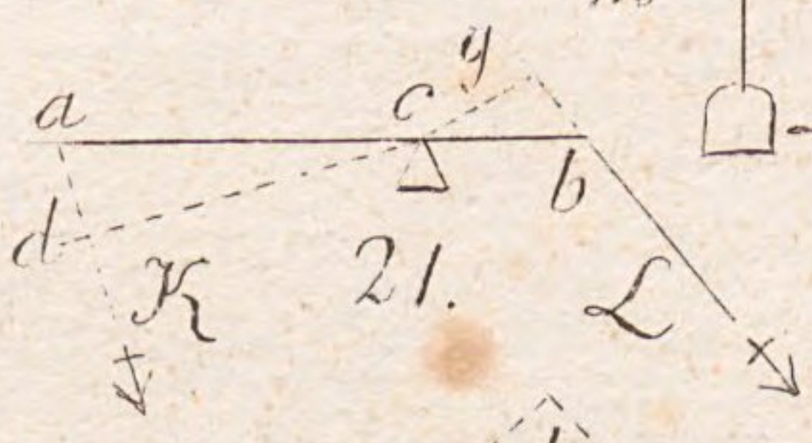

n
23.
c
b
a
L

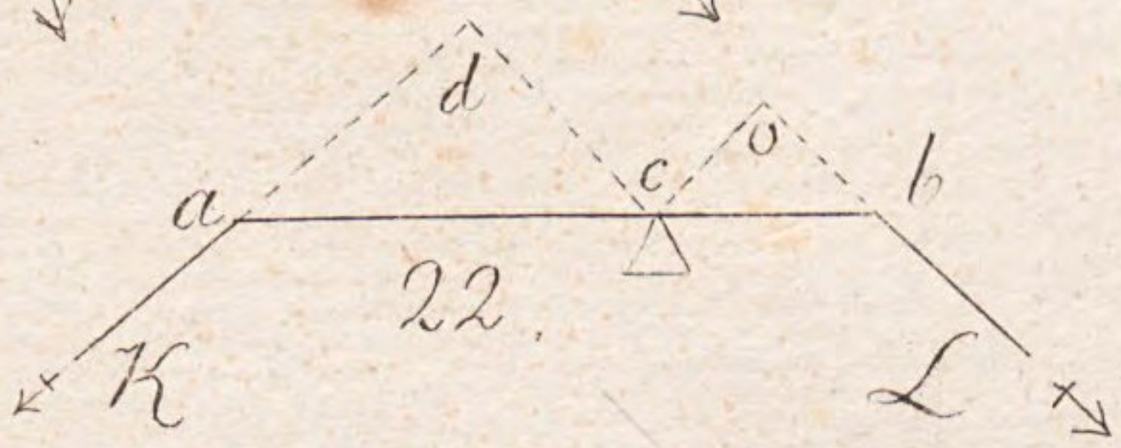

p
25.
K
c
a
b
m
n
L

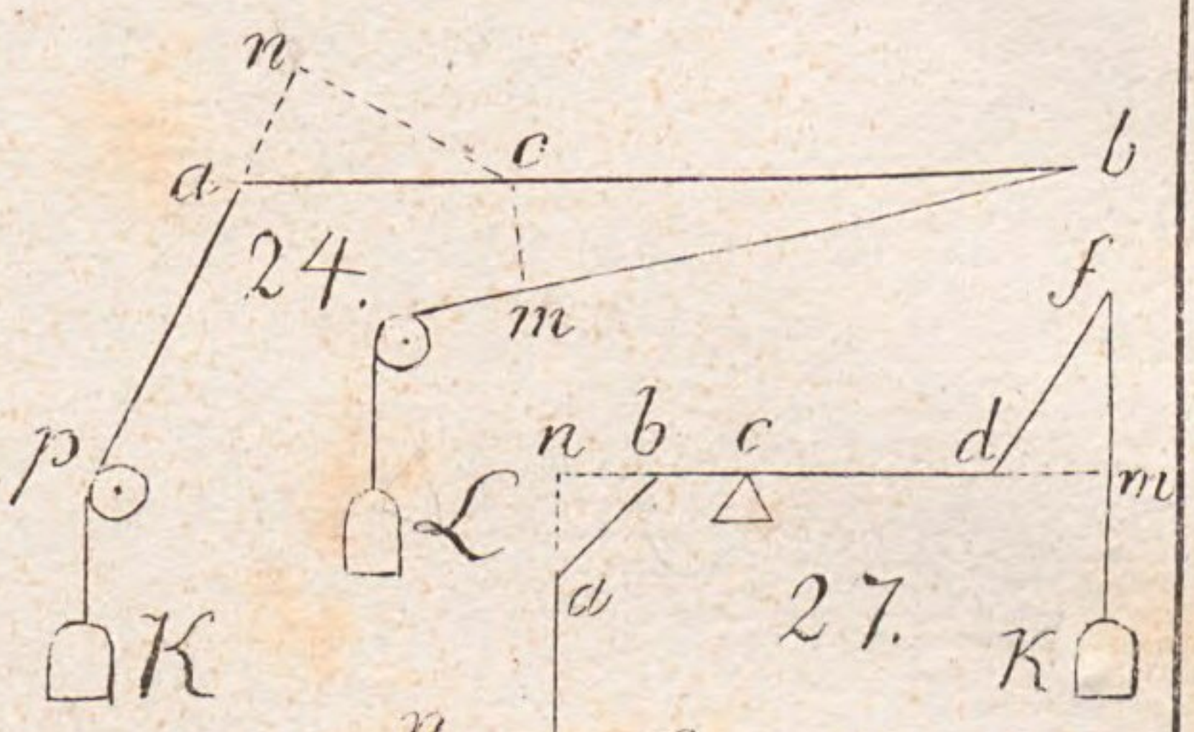

d
n
b
a
c
f
28
L
K

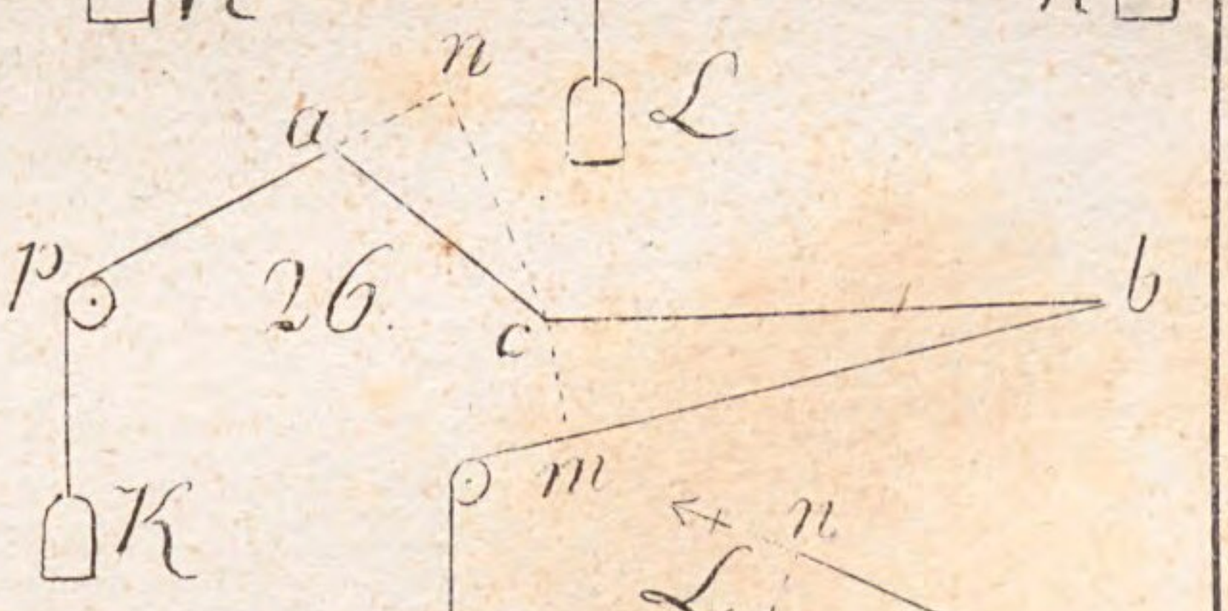

f
a
m
c
b
n
L
31.
K
g

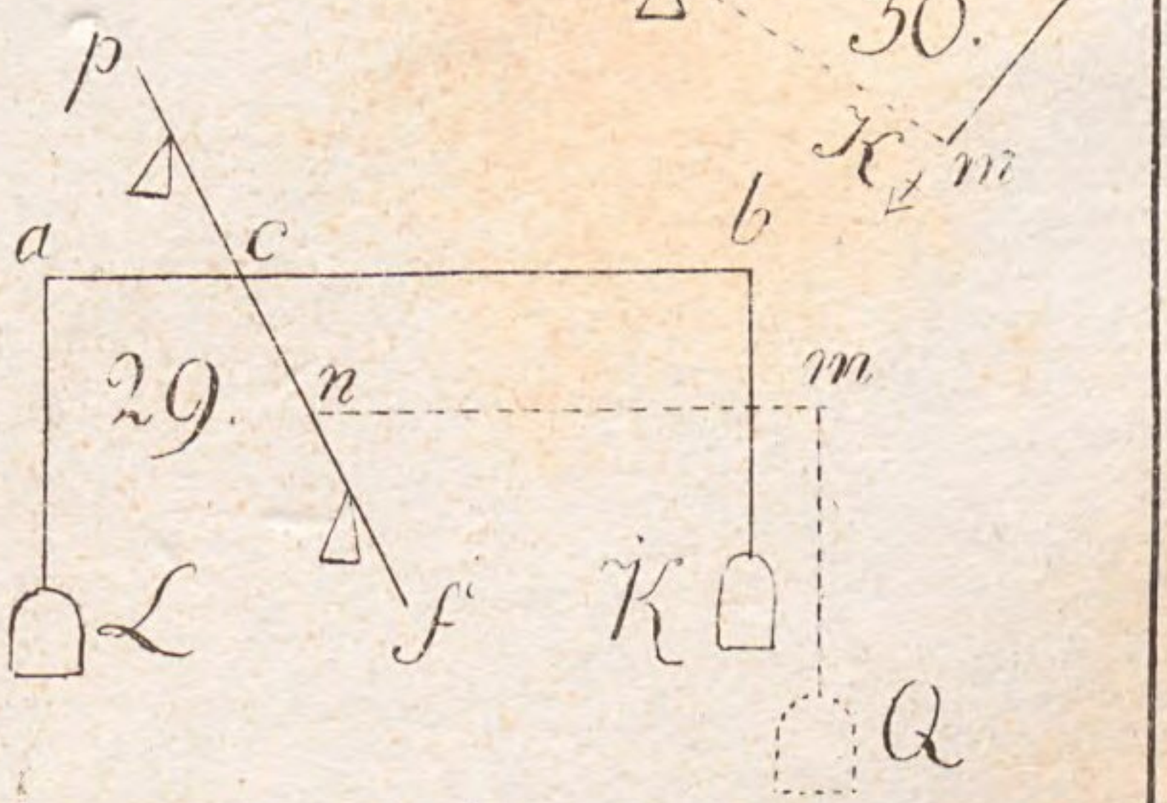

b
19
d
a
n
c
o
m

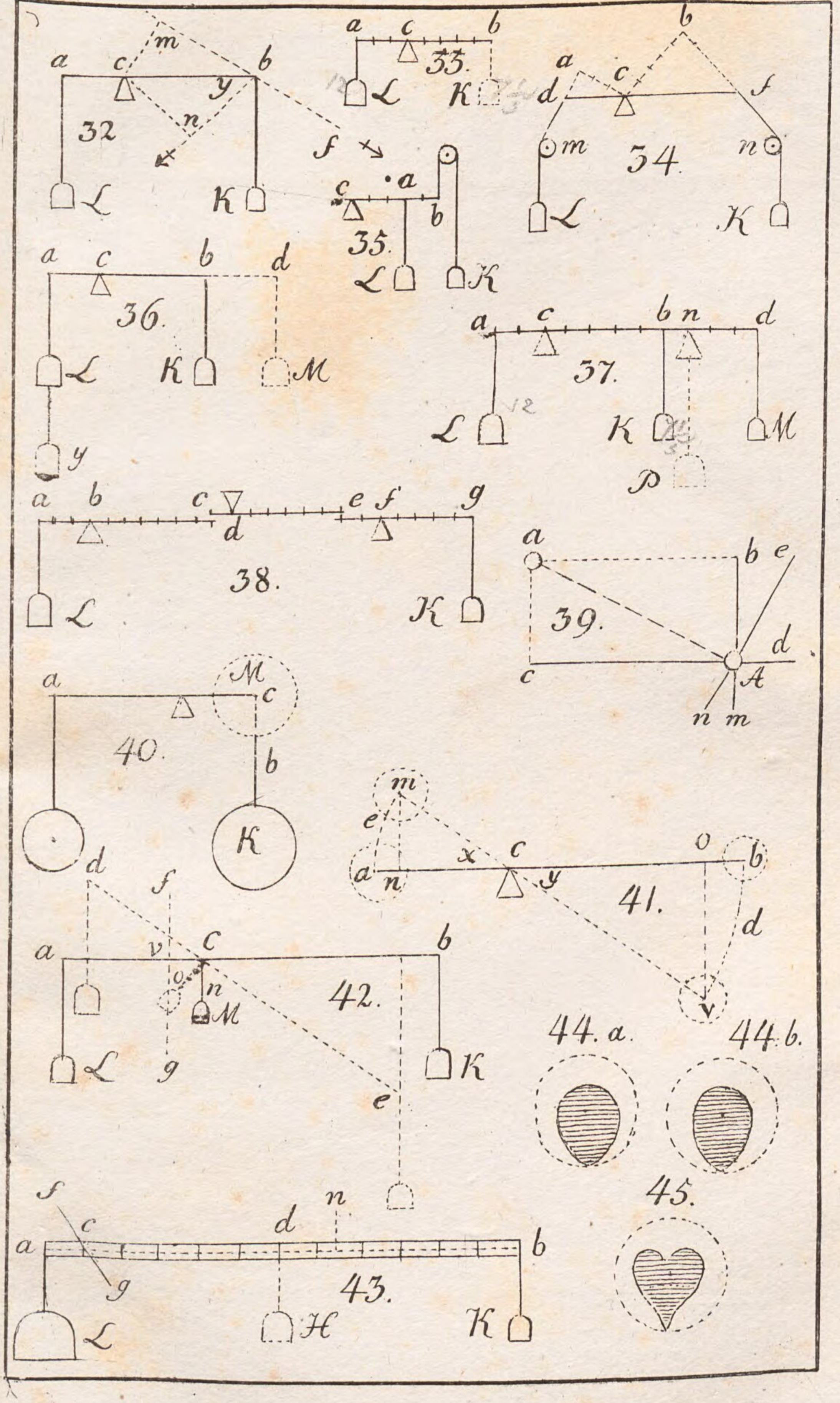

a
g
c
b
d
K
21.
L

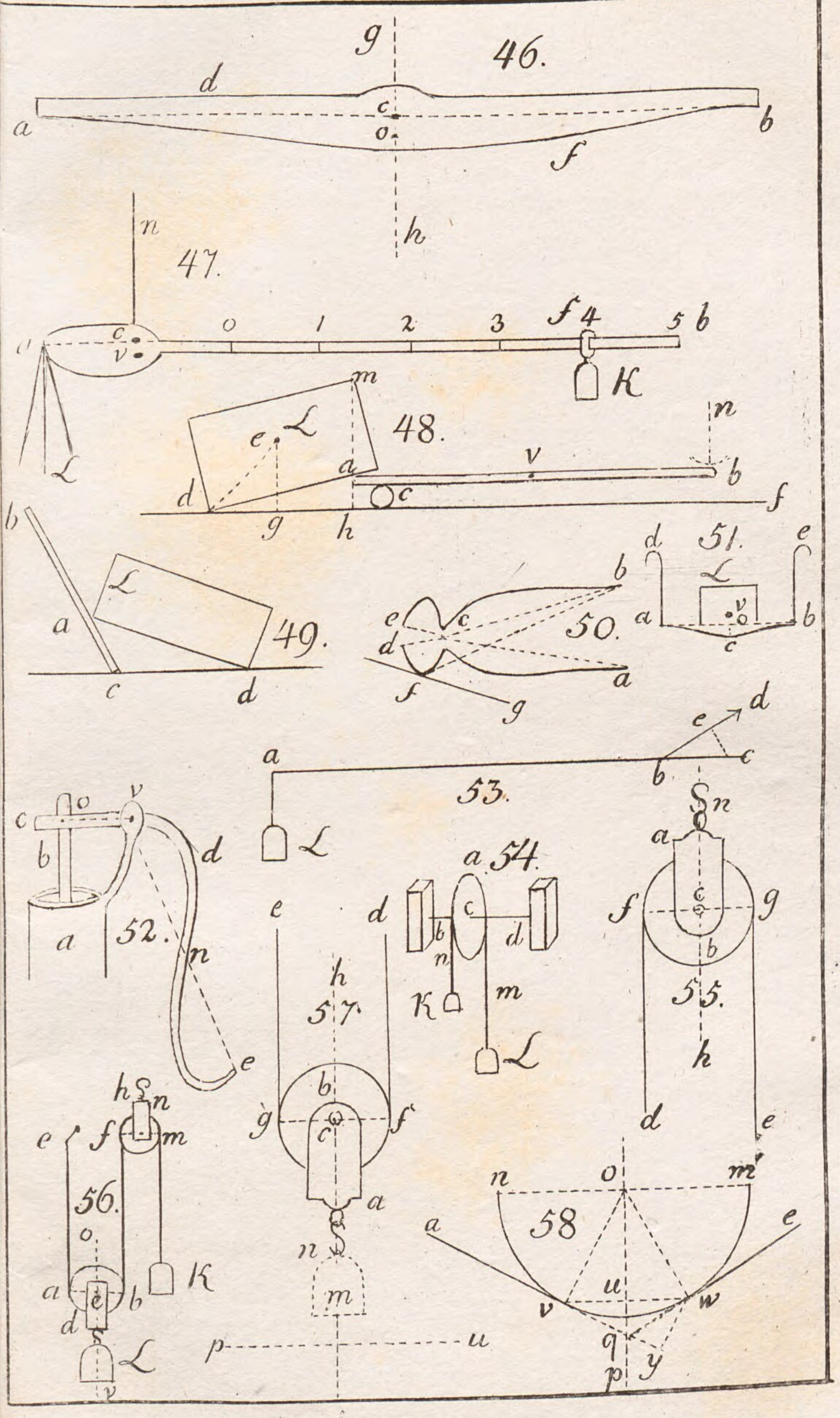

d
a
c
o
b
22.
K
L

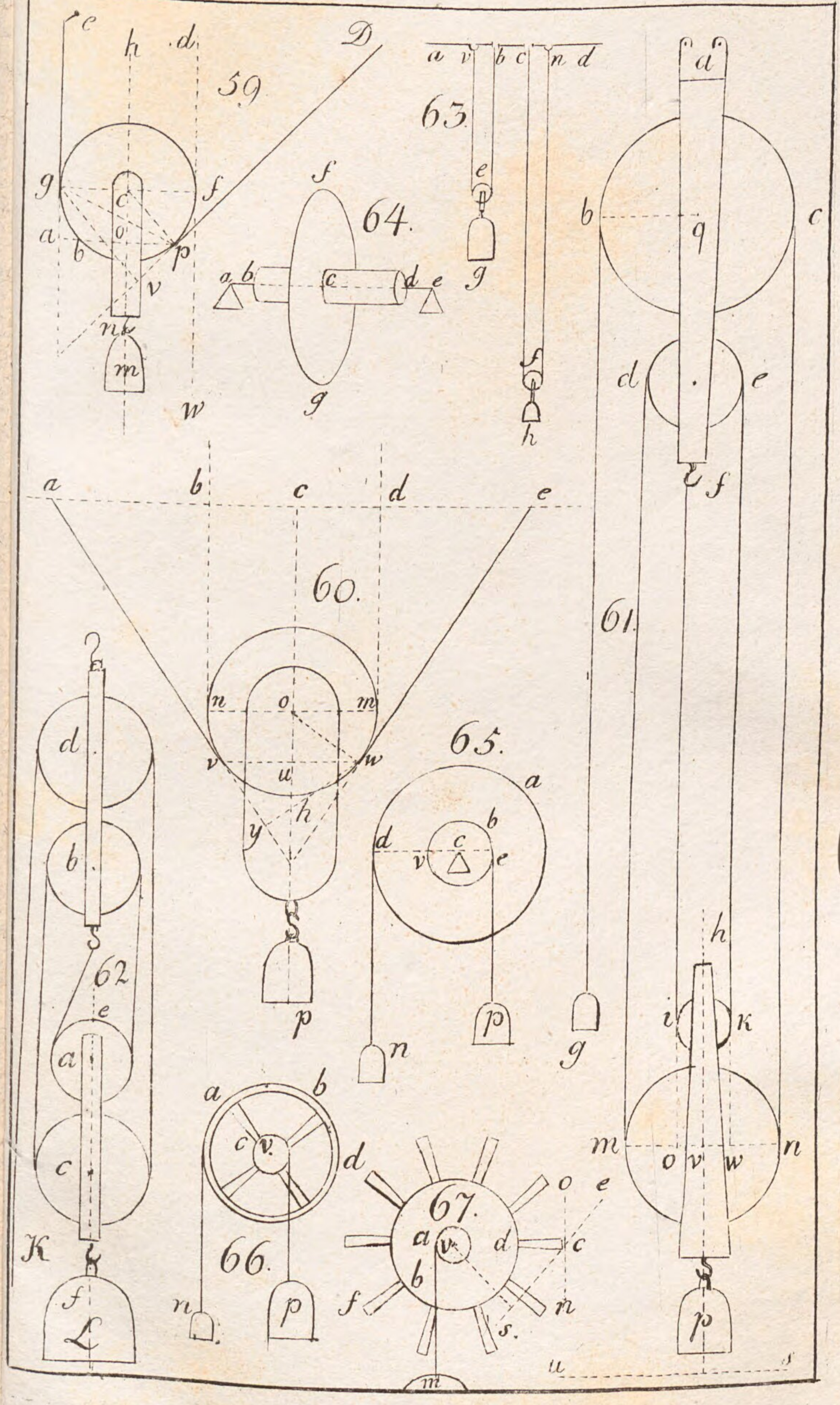

n
a
c
b
24.
m
f
p
n
b
c
d
m
L
a
27.
K
K
L

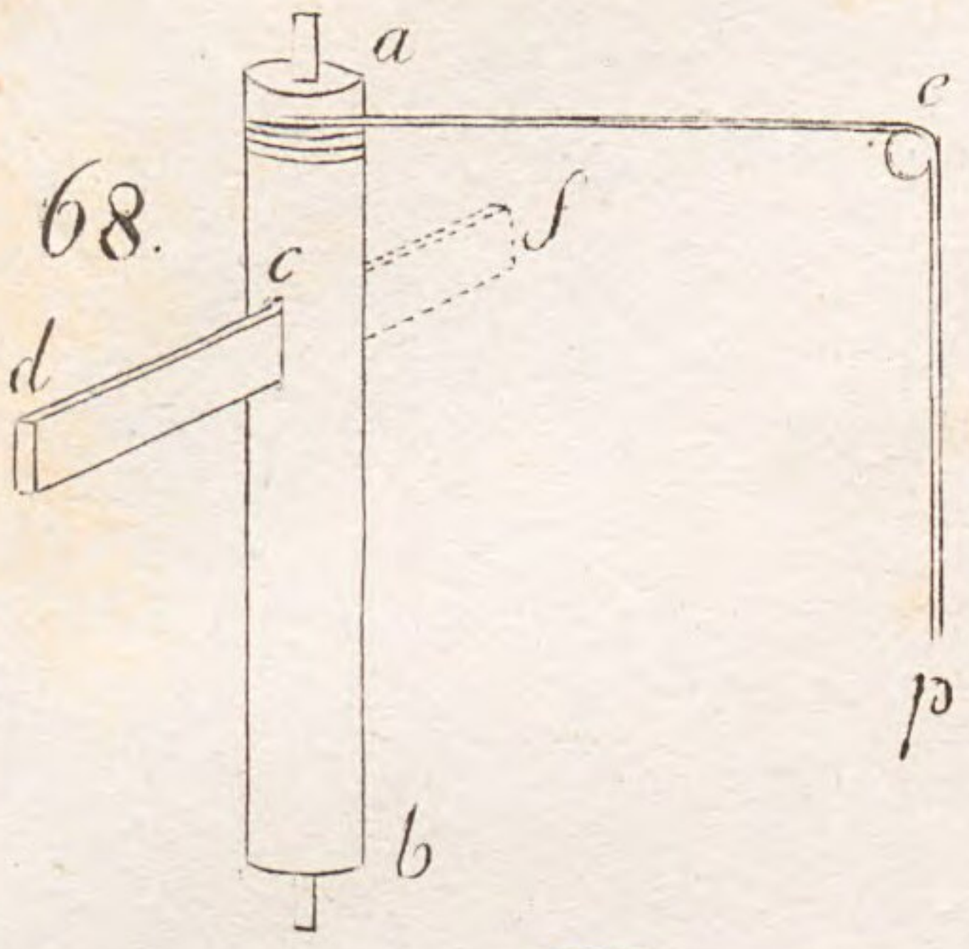

n
a
p
26.
c
b
K
m
L
n
L
c
a
30.
K
m

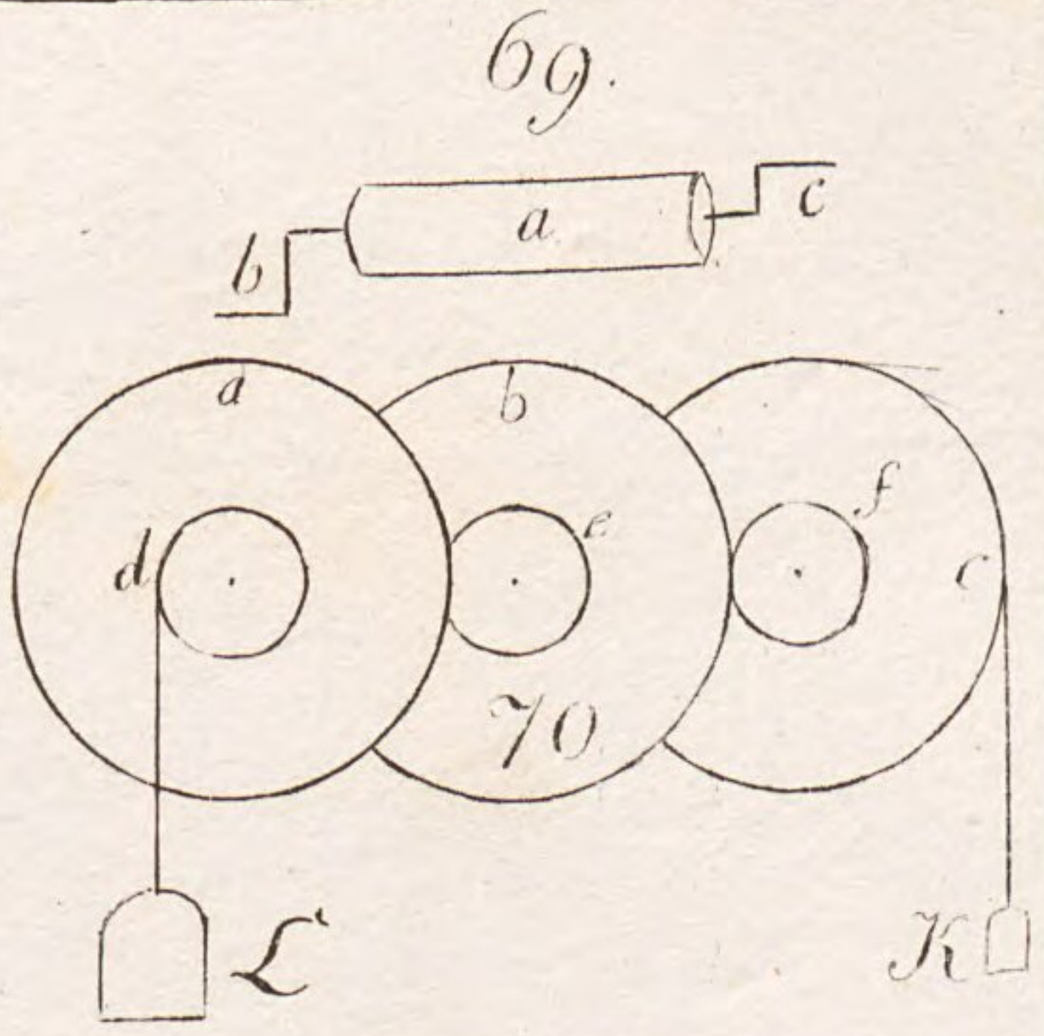

p
a
c
b
29.
n
m
L
f
K
Q

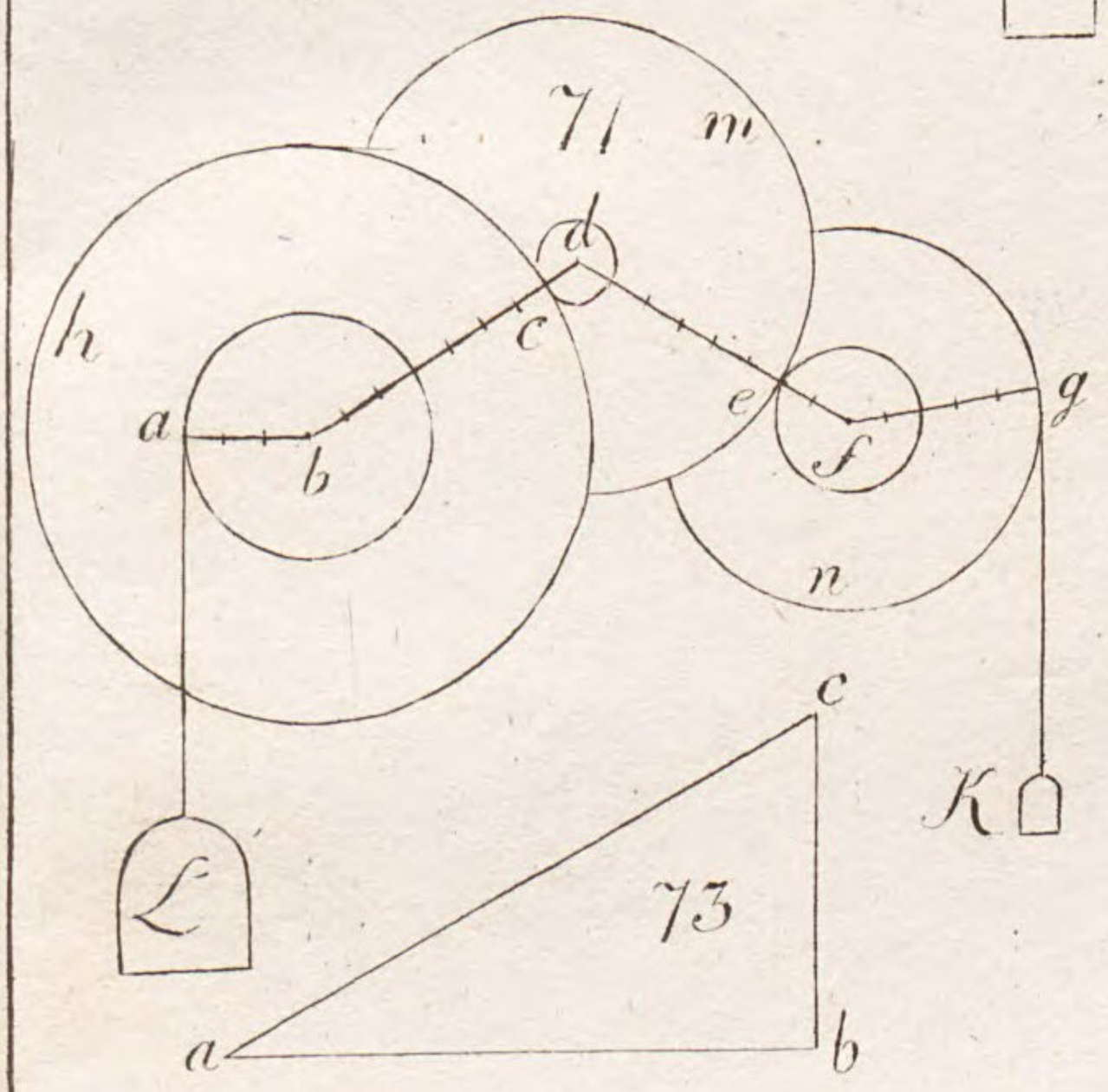

32
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44. a.
44. b.
45.


g
46.
d
c
a
o
b
f
n
h
47.
c
v
0 1 2 3 f 4 5 b
K
L
m
e
L
48.
a
v
n
b
d
c
f
g
h
b
L
a
49.
c
d
d
51.
e
L
b
e
c
50.
a
v
o
b
d
c
f
a
g
e
d
a
c
b
53.
L
o
v
c
b
d
52.
a
n
e
a
54.
e
d
c
b
d
n
h
57.
K
m
L
h
n
e
f
m
56.
o
a
e
b
K
d
L
v
b
g
c
f
a
n
m
p
u
a
54.
n
a
f
c
g
b
55.
h
d
e
n
o
m
a
58
e
u
v
w
q
p
y

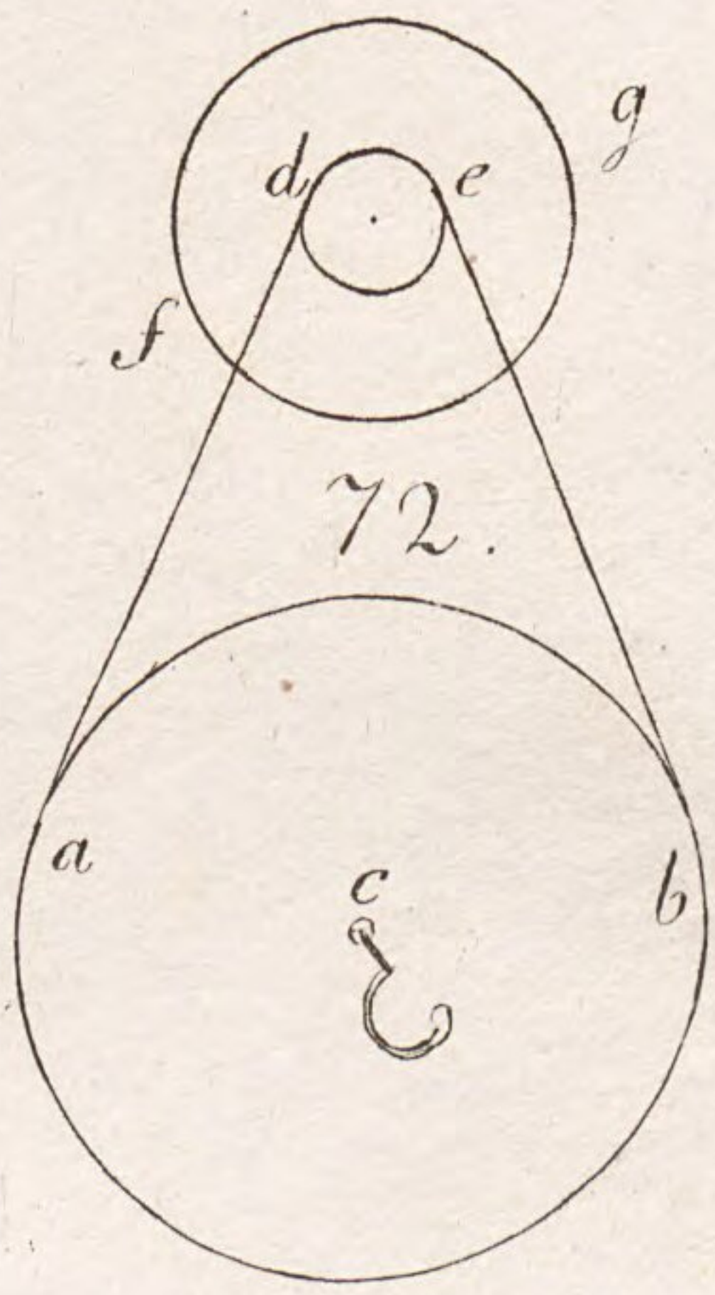

59.
63.
64.
60.
61.
62.
65.
66.
67.

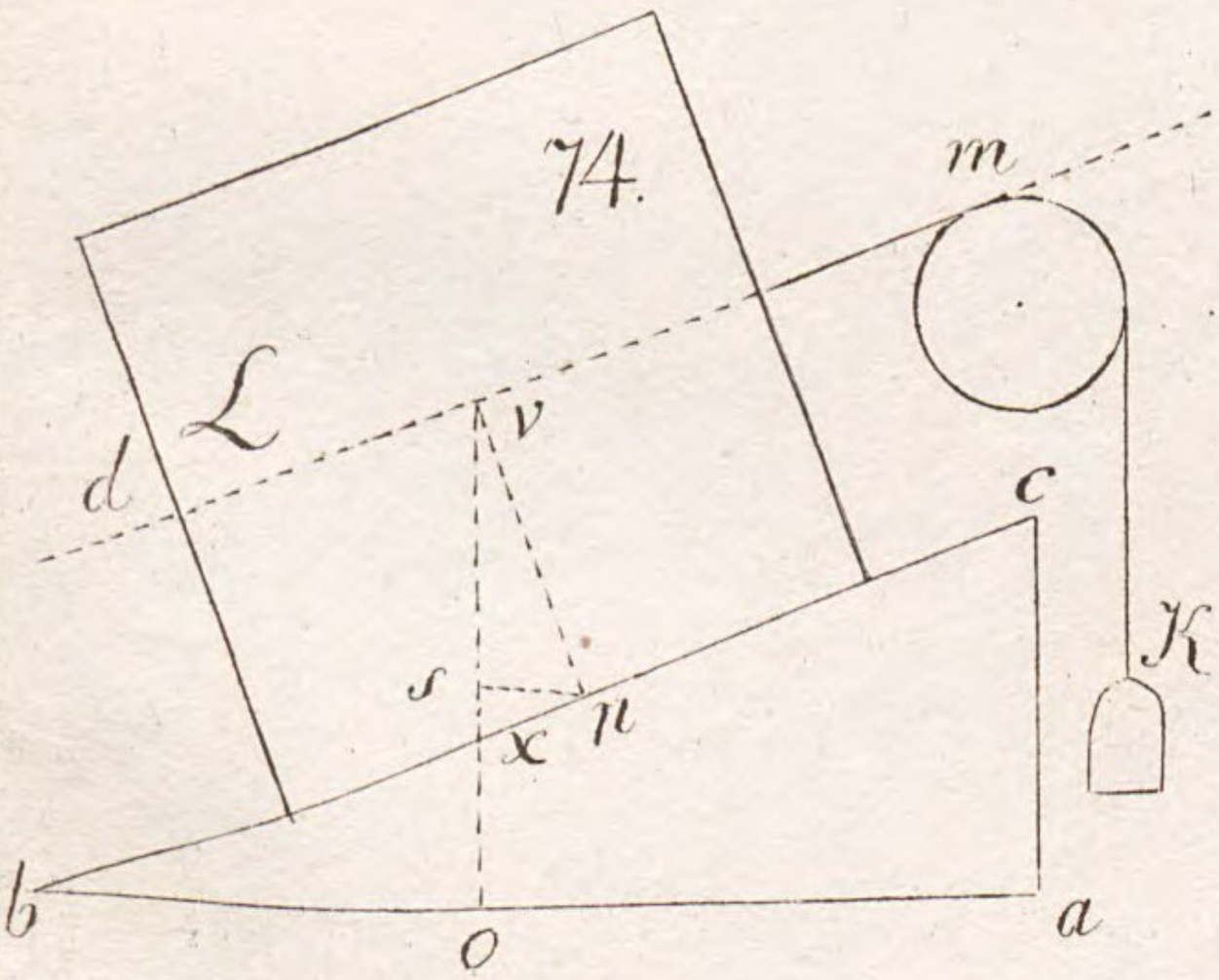

68.
a
c
s
d
b
p

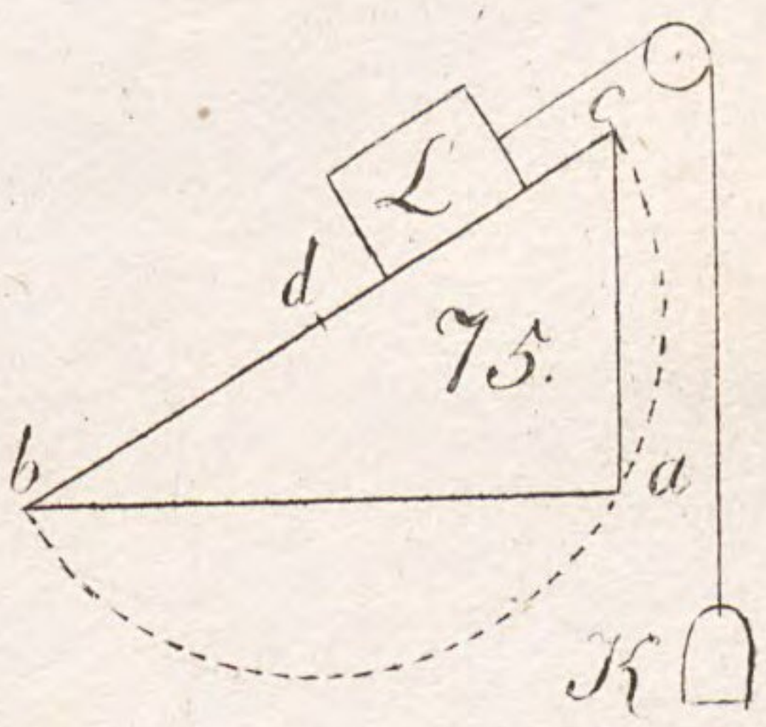

69.
a
b
c
70.
d
e
f
K
L

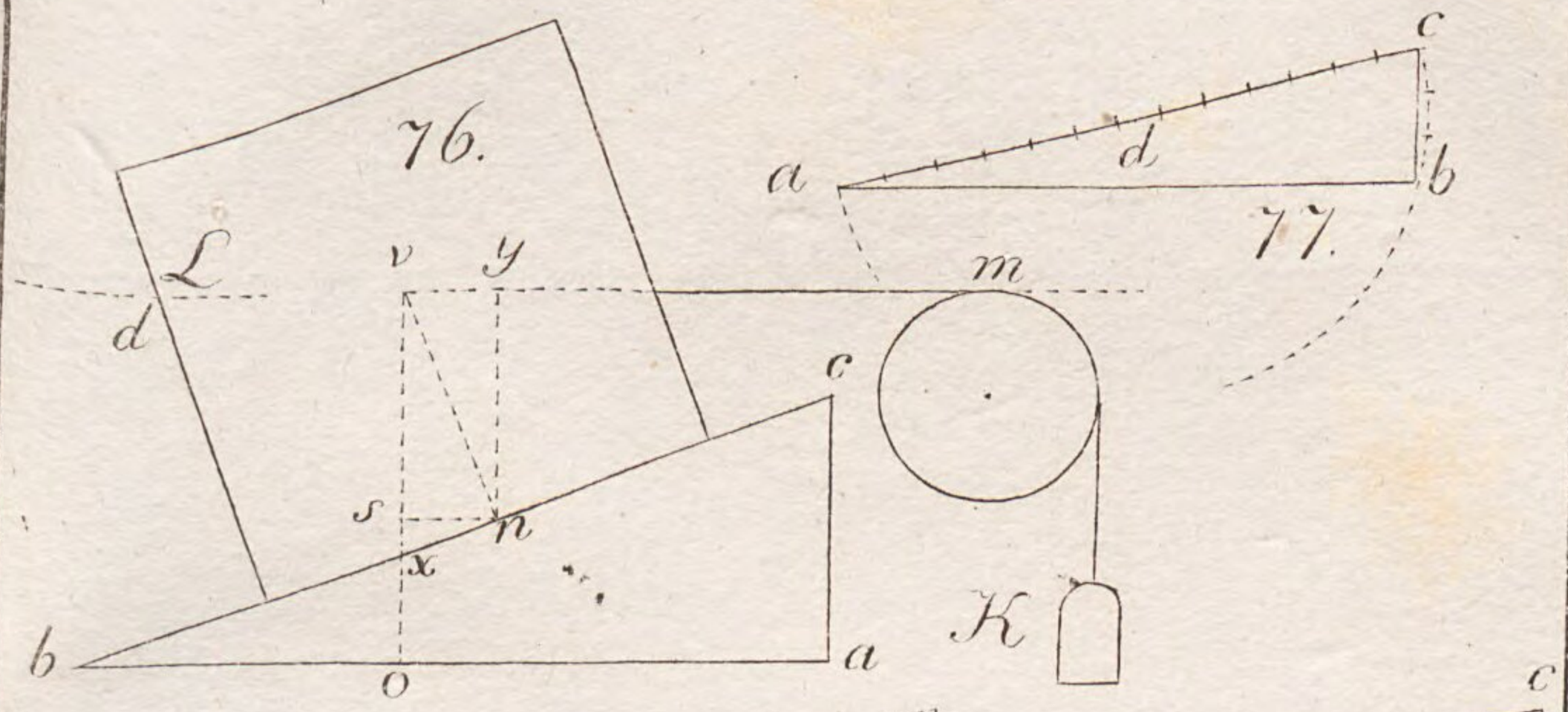

71.
m
h
d
c
a
b
e
f
g
n
K
L

c
73.
a
b

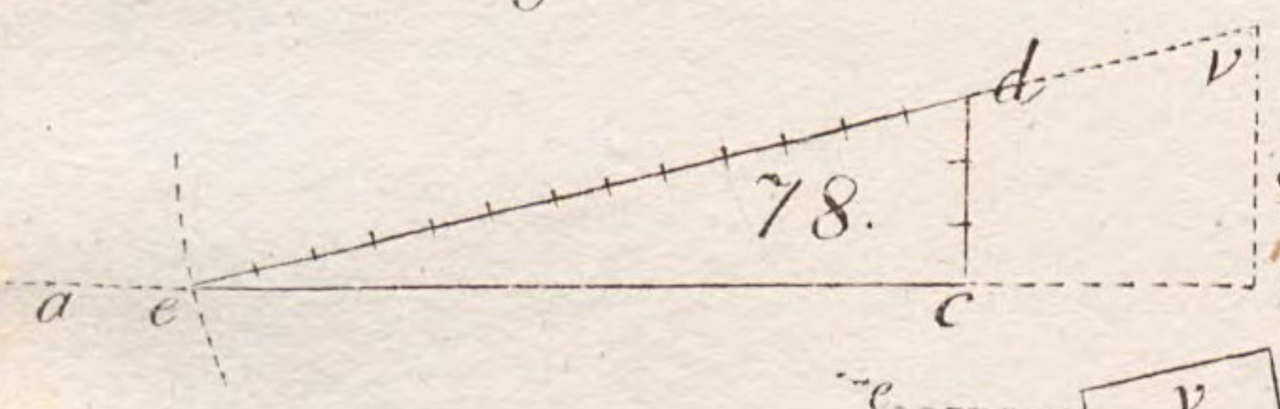

d
e
g
f
72.
a
c
b

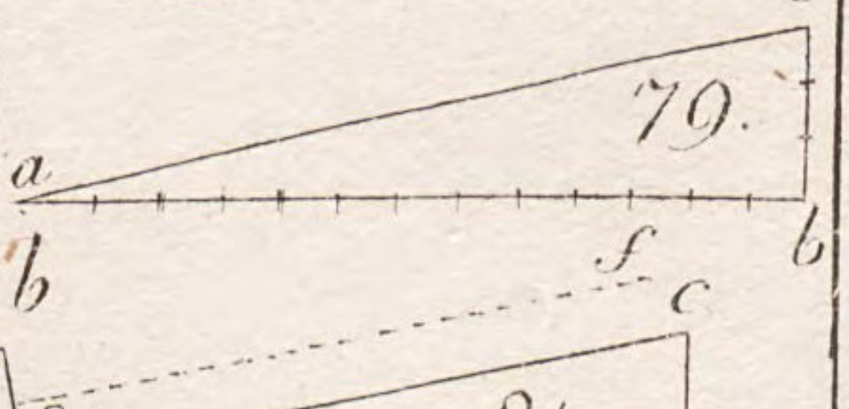

74.
m
L
d
v
c
K
s
x
n
b
o
a

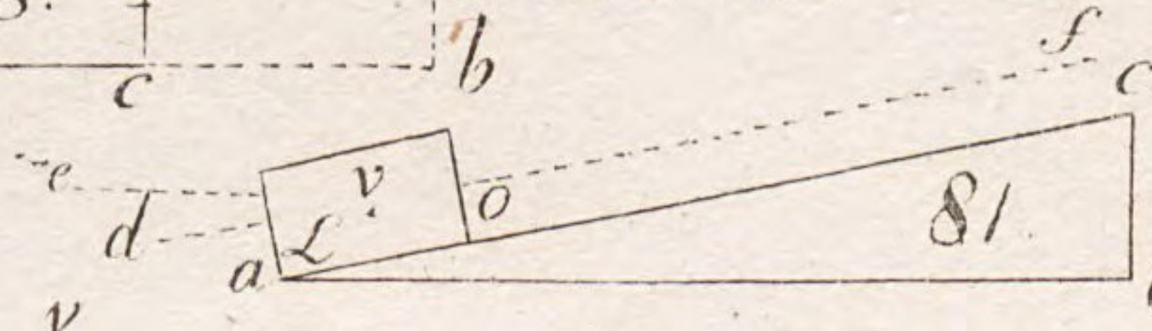

L
c
d
75.
b
a
K

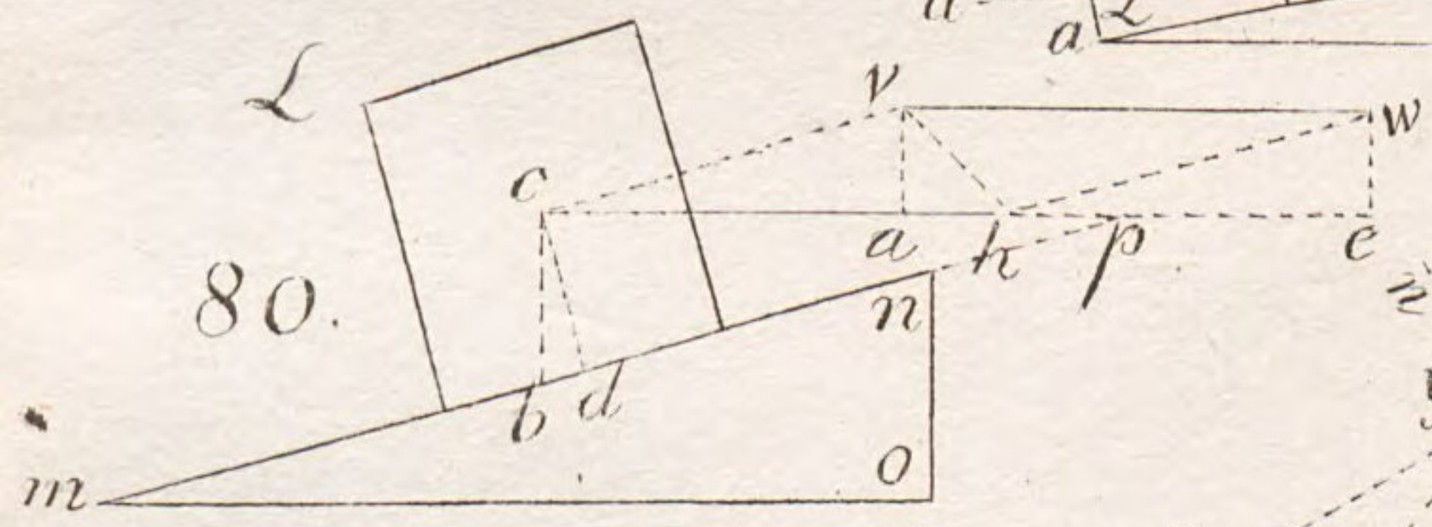

76.
L
v
y
d
c
s
n
x
b
o
a
K

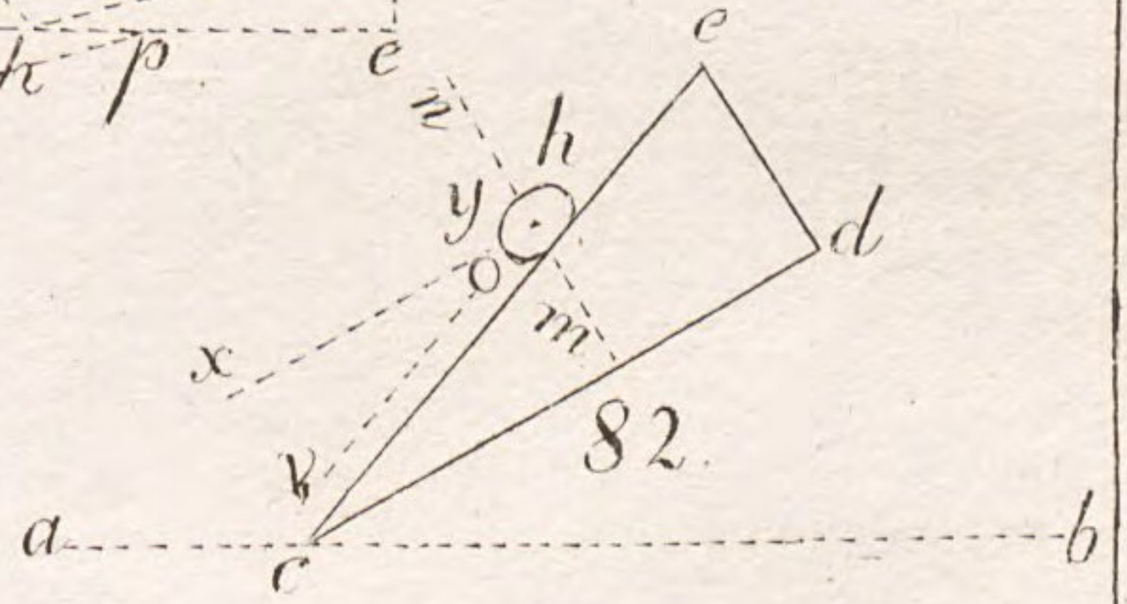
c
a
d
b
77.
m

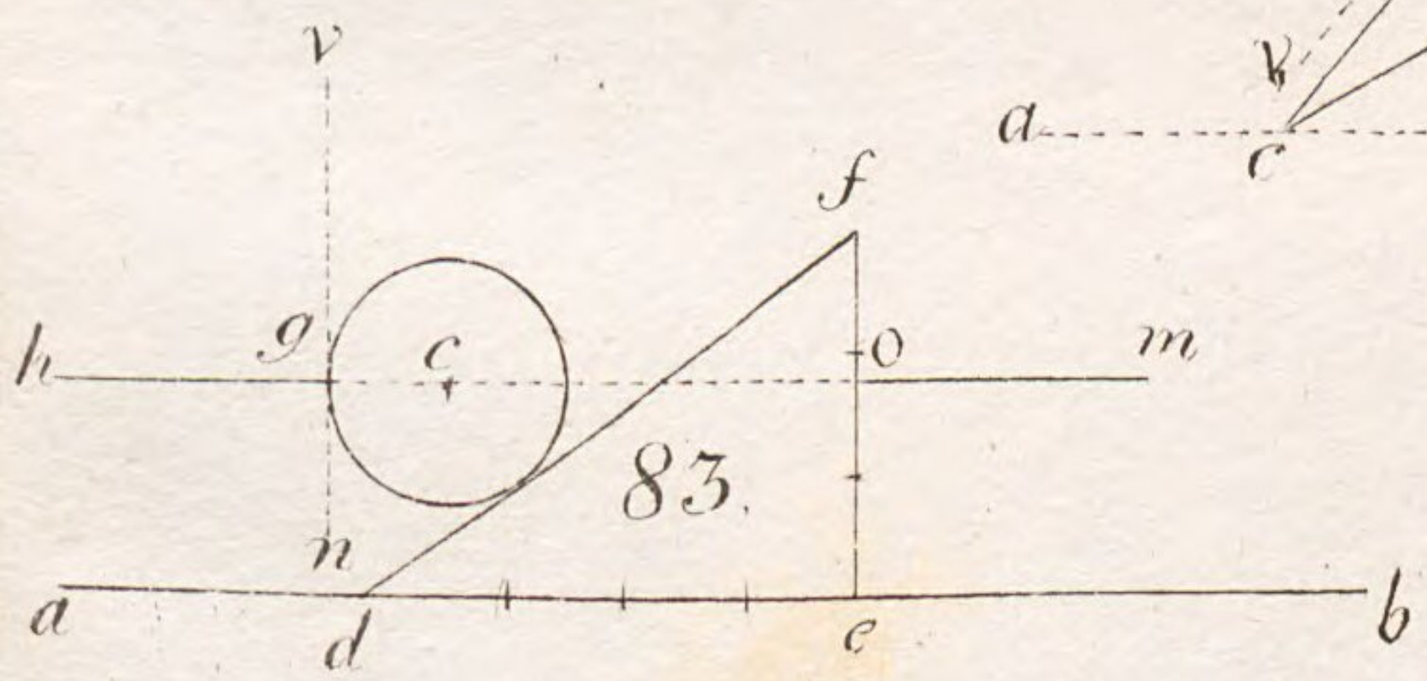

d
v
78.
a
e
c
b

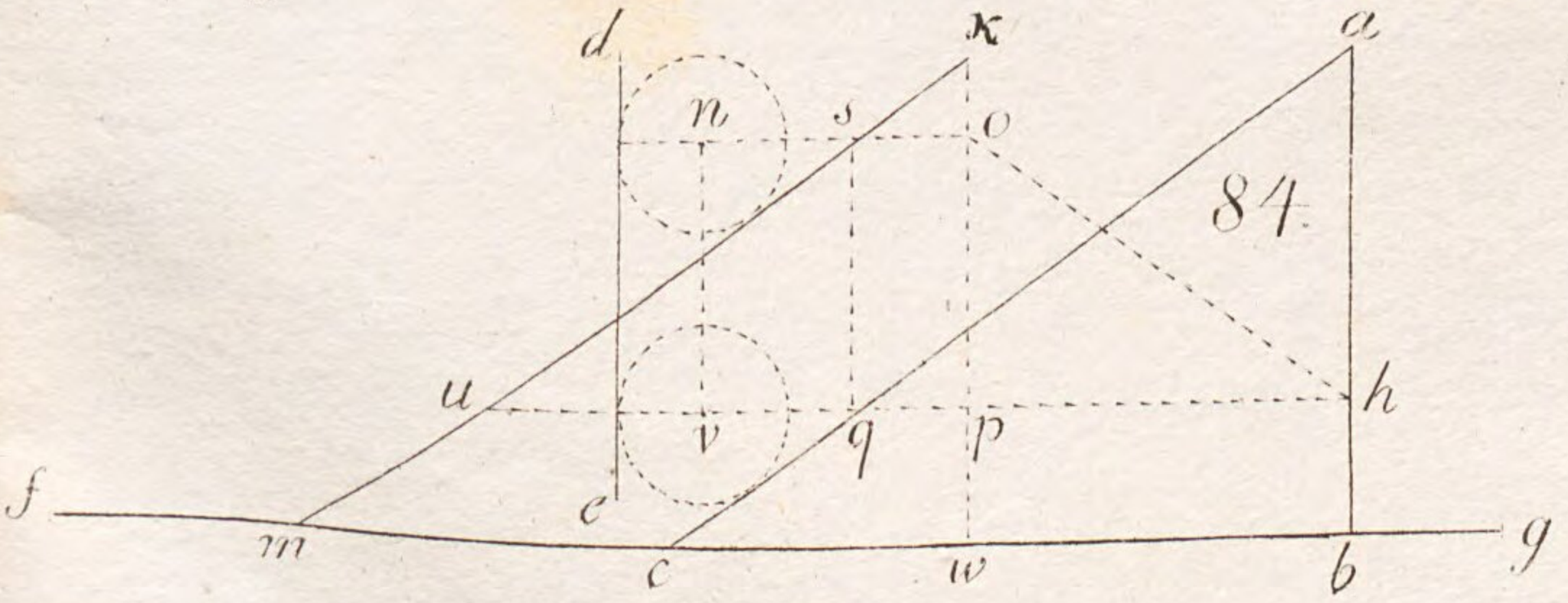

c
79.
a
b

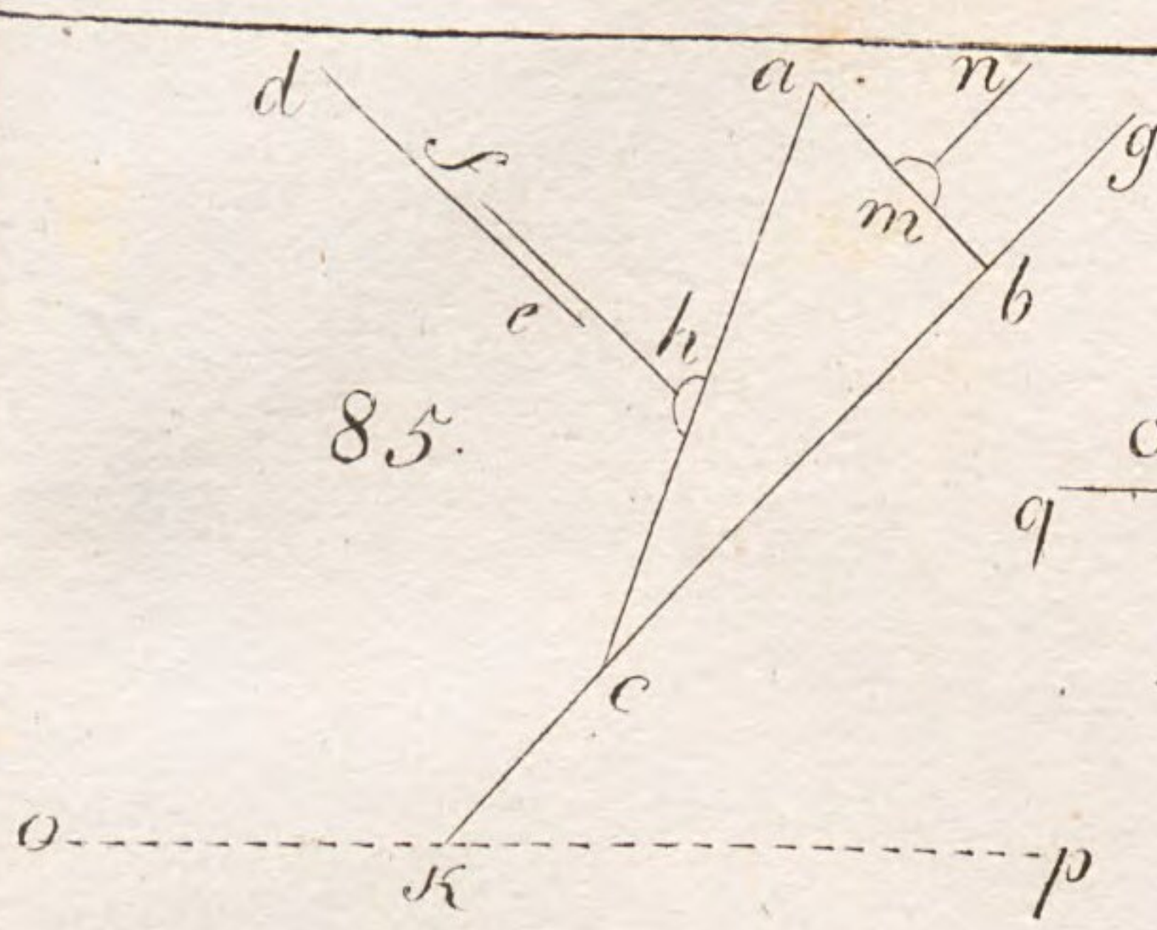

f
c
e
d
v
L
o
a
81.
b


L
v
w
c
80.
a
k
p
e
n
b
d
m
o

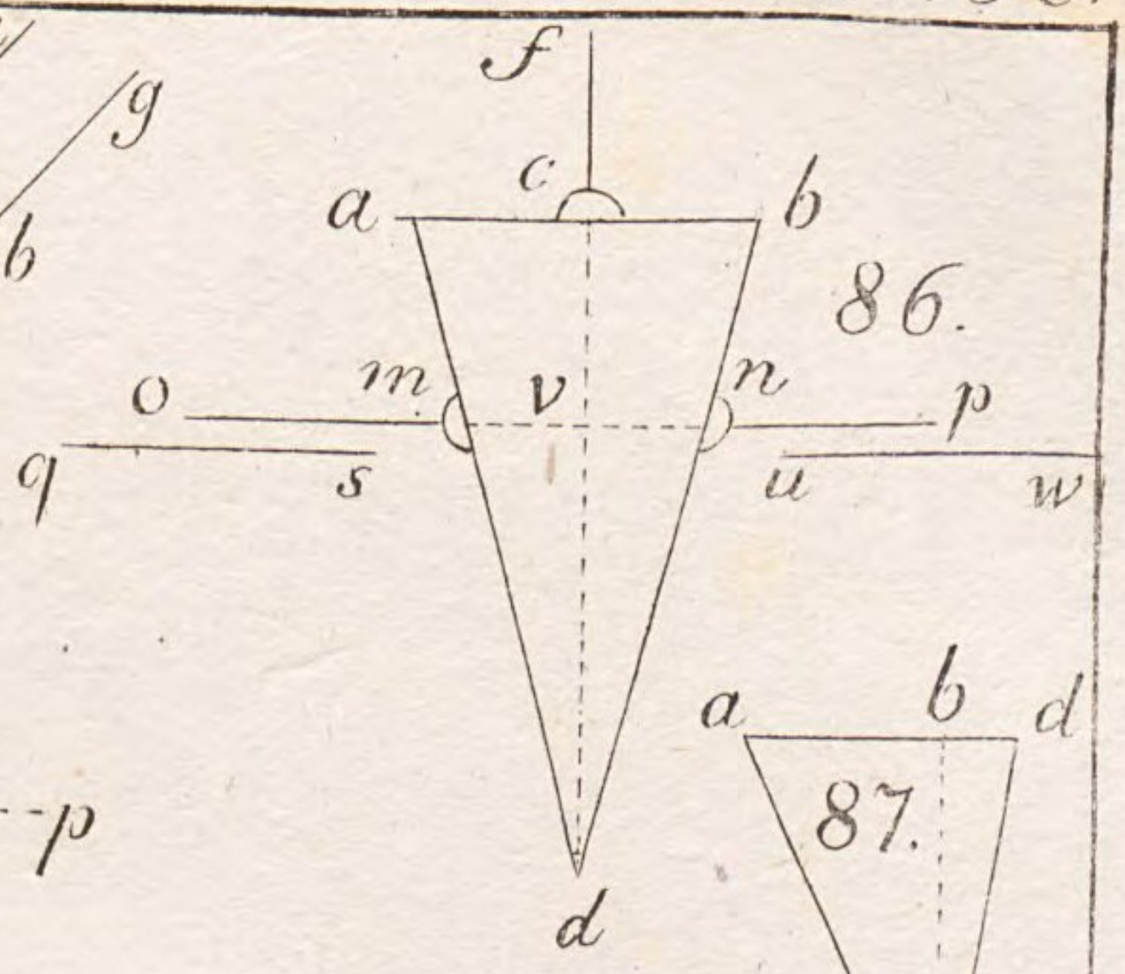

e
z
h
y
d
o
x
m
82.
v
a
c
b


v
f
h
g
c
o
m
83.
n
a
d
e
b

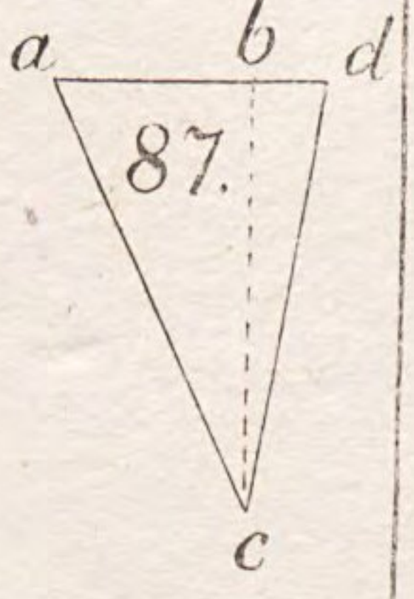

d
x
a
n
s
o
84.
u
h
v
q
p
f
e
m
c
w
b
g



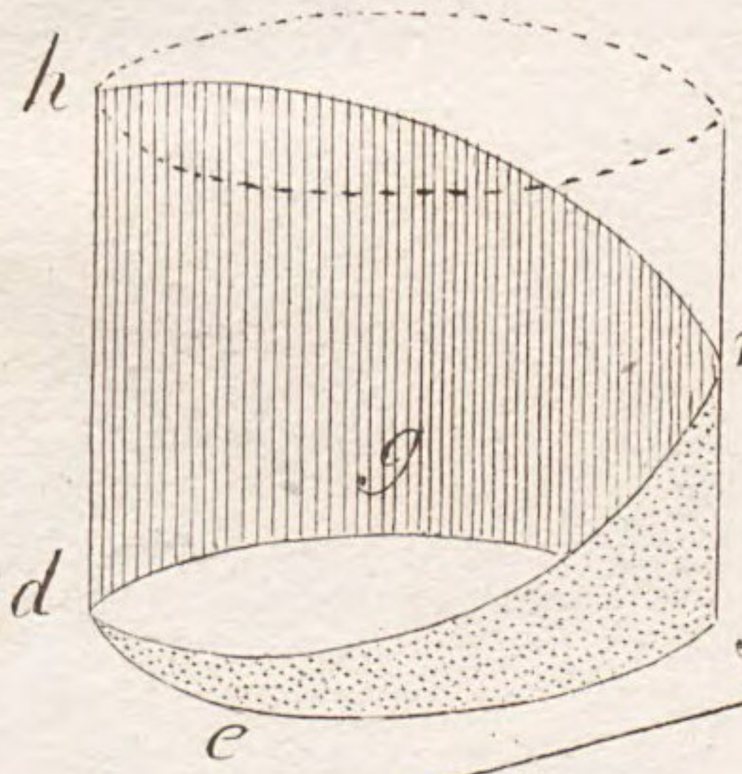
85.

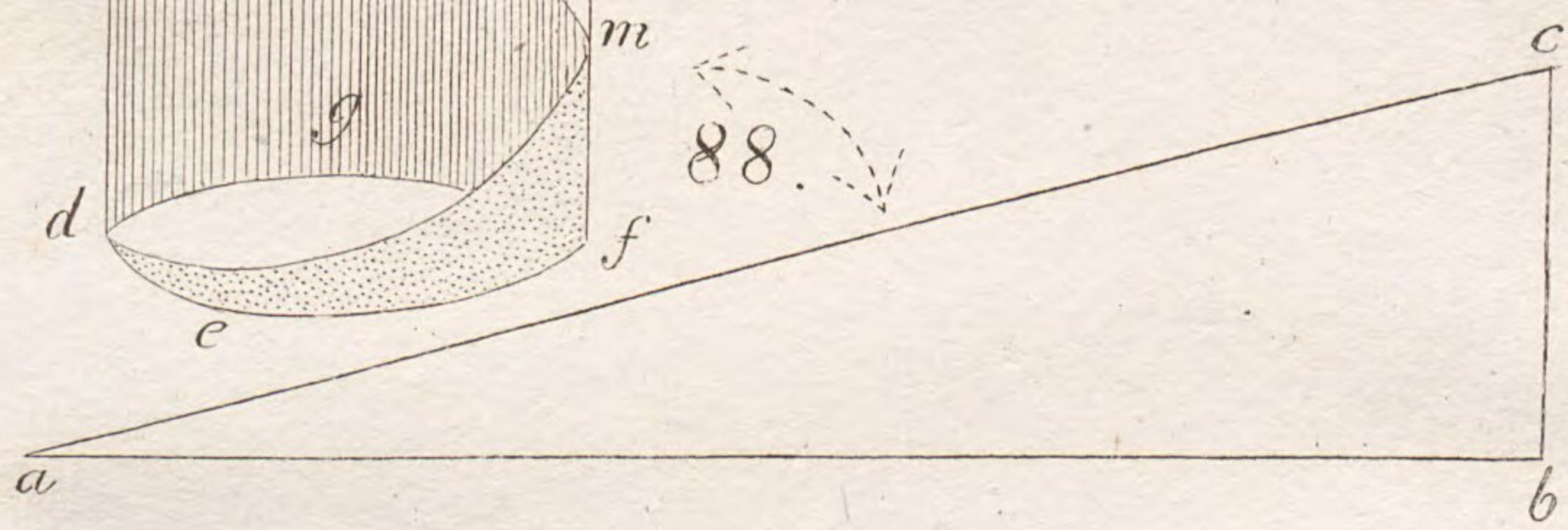


86.

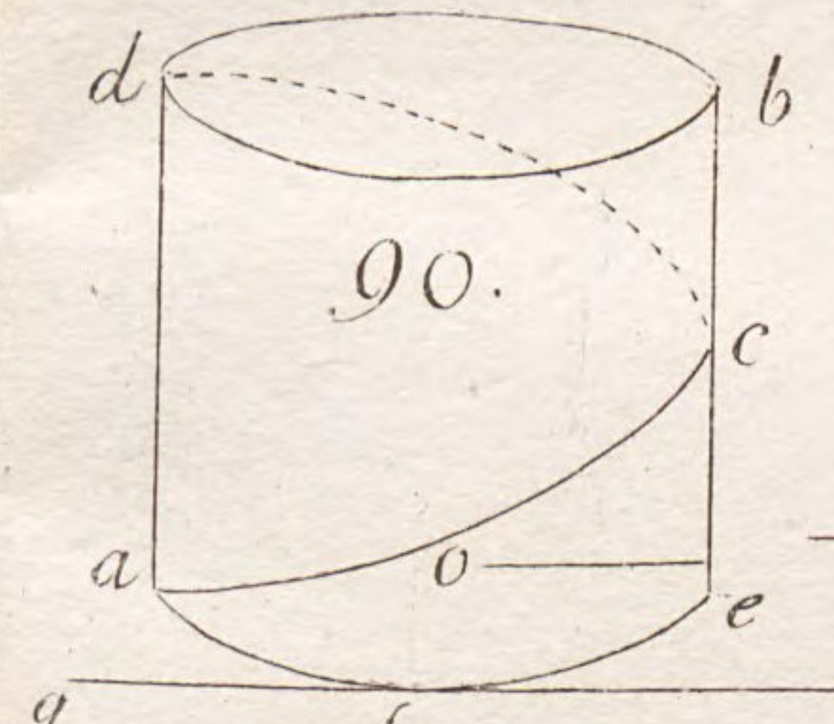


87.

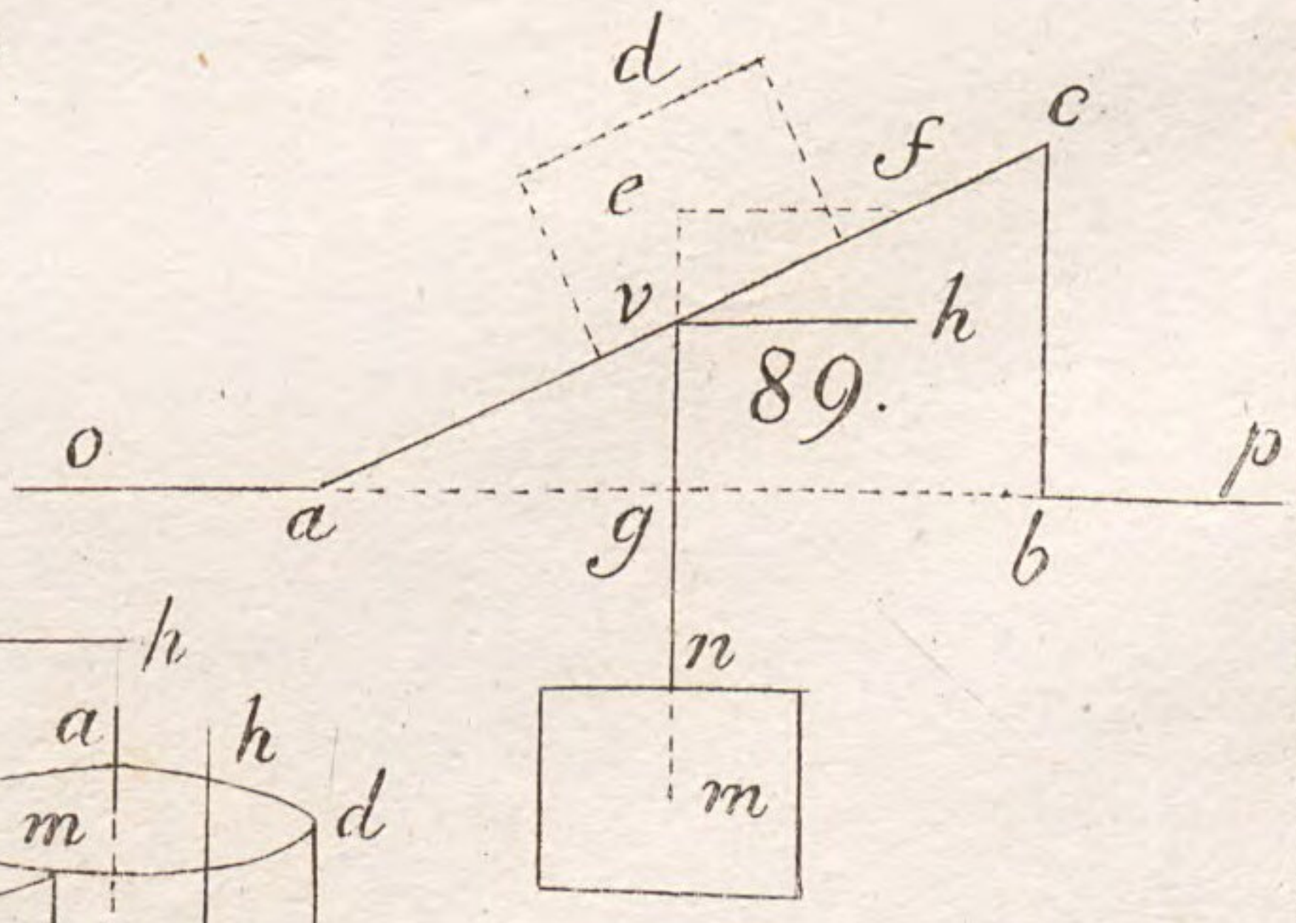




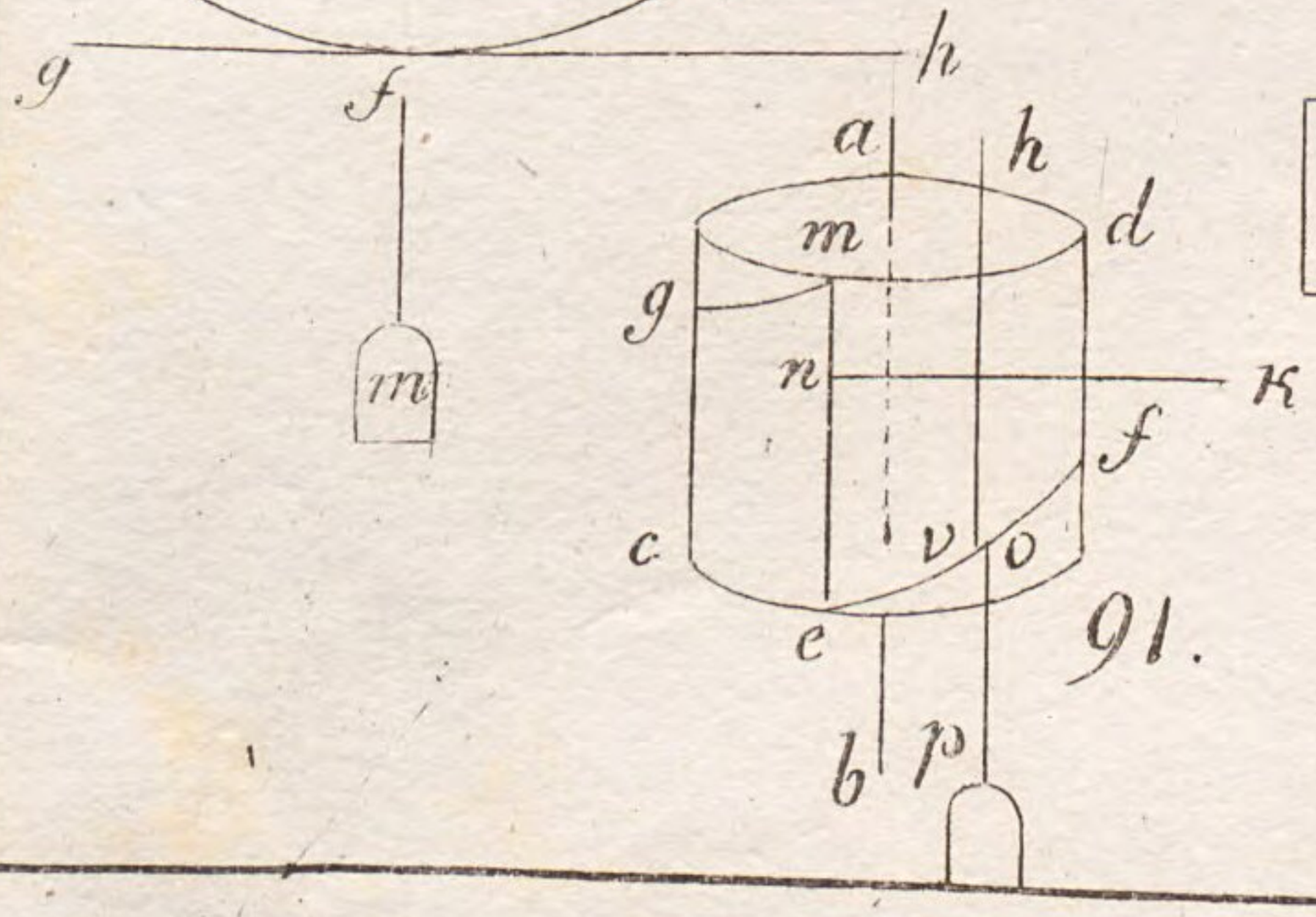
88.



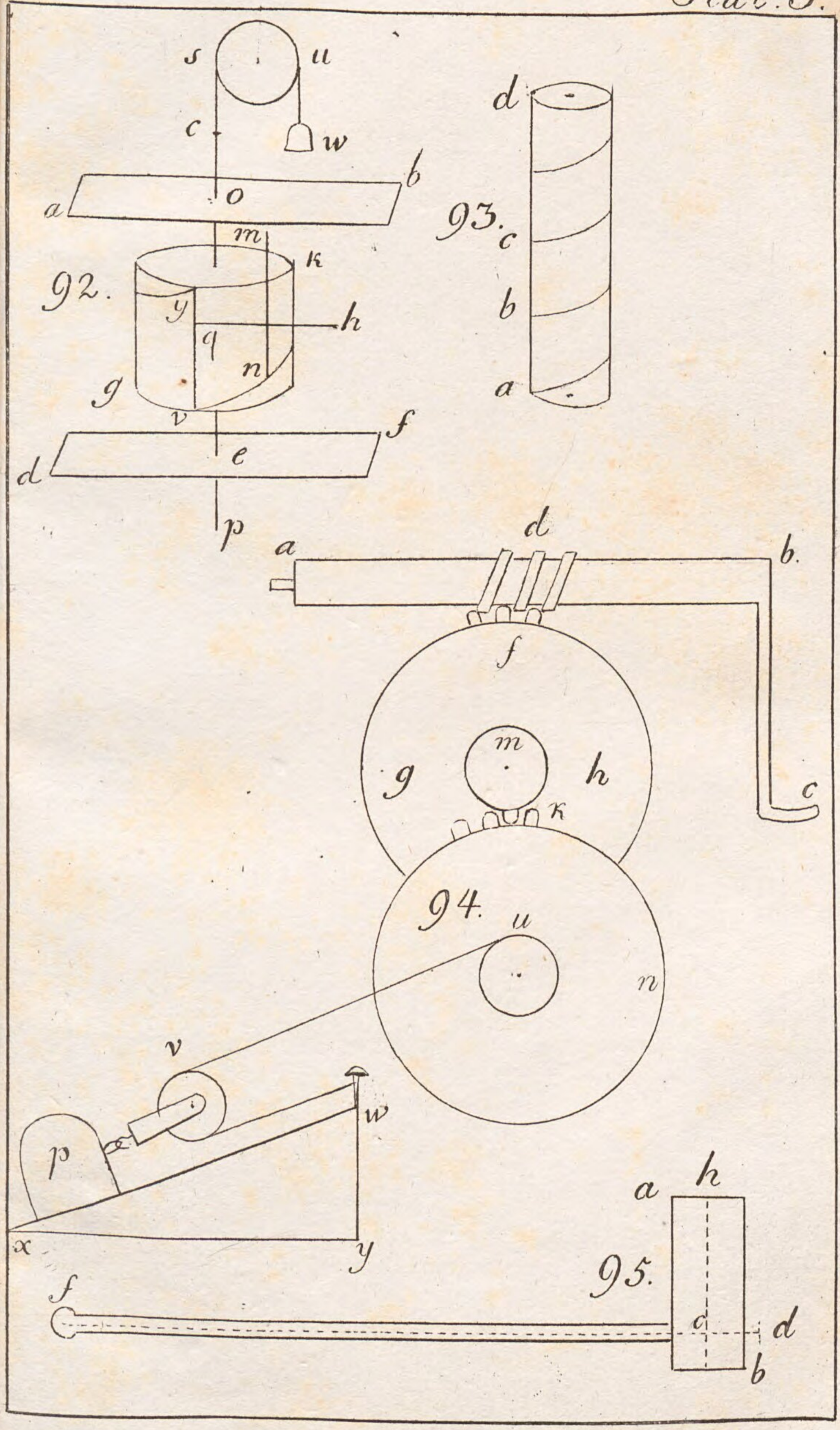
90.



89.



91.


s
u
c
w
a
o
b
m
k
92.
y
h
q
g
n
v
d
e
f
p
d
93.
c
b
a
a
d
b.
f
m
g
h
k
c
94.
u
n
v
w
p
x
y
a
h
95.
f
d
d
b

ع. ج.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schmidt, Johann Gottlieb,

Lehrbuch der Mechanik

Leipzig 1807
Math.a. 213 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081129-2